

*Article History*

*Received / Geliş*  
24.02.2017

*Accepted / Kabul*  
14.03.2017

*Available Online / Yayınlanma*  
25.03.2017

**ERRORS OF PROSPECTIVE MIDDLE  
SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS IN  
PROBLEMS USING ELEMENTARY ROW  
OPERATIONS IN LINEAR ALGEBRA  
COURSE**

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ LİNEER CEBİR  
DERSİNDE İLKEL SATIR İŞLEMLERİ KULLANILAN  
PROBLEMLERDEKİ HATALARI

**Murat KOPARAN<sup>1</sup>**  
**Osman BAĞDAT<sup>2</sup>**

**Abstract**

The current study focused on elementary row operations used in solving some problems in linear algebra course. The aim of the study was to determine the errors made by prospective middle school mathematics teachers while using elementary row operations for matrix operations, the solution system of linear equations and of some questions in linear algebra course. The study in which qualitative approach was used, carried out with 81 prospective teachers in a State University. Data was collected through data form including 4 open ended questions. Answers were examined by two field experts independently and findings were presented in themes. As a result, it was found that prospective teachers generally had operation errors while using elementary row operations. Besides, prospective teachers' lack of knowledge and terms which has a crucial role and also required for problem solving directed them making some errors. It was also observed that prospective teachers had some errors in logical construction of solutions and mathematics language that they used as a result of exam-oriented education in high school level. As a result of the study, it was proposed that students should solve conceptual and proving skills-based problems before coming to university level. It was also stated that mathematical language such as symbols, quantifiers which have an important place in mathematics should be emphasized more in education programs.

**Keywords:** Linear algebra, Elementary row operations, Prospective mathematics teachers, Errors.

**Özet**

Bu çalışma lineer cebir dersinde bazı problemlerin çözümünde kullanılan ilkel satır işlemlerine odaklanmaktadır. Amaç, ortaokul matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersinde matris işlemleri, lineer denklem sistemleri ve bazı problemlerin çözümü için ilkel satır işlemlerini kullanırken yaptıkları hataları araştırmaktır. Nitel araştırma deseninin kullanıldığı bu araştırma bir devlet üniversitesinde ortaokul matematik öğretmenliği programına devam eden 81 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Veriler dört sorudan oluşan açık uçlu bir sınav aracılığıyla toplanmıştır. Sorular birbirinden bağımsız olarak iki alan uzmanı tarafından analiz edilmiş, bulgular temalar altında sunulmuştur. Sonuç olarak öğretmen adaylarının ilkel satır işlemlerini uygularken genellikle işlem hatası yaptıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının problemlerin çözümünde kilit rol oynayan bazı kavramlara veya gerekli olan bilgilere dair eksiklikleri, onları birtakım hatalara yöneltmiştir. Öğretmen adaylarının lise döneminde sınava yönelik aldıkları eğitimin bir sonucu olarak kullandıkları matematik dilinde ve çözümlerin mantıksal diziliminde birtakım hatalarının olduğu görülmüştür. Çalışma sonucunda öğrencilerin üniversiteye gelmeden önce kavramsal sorular ve kanıtlama becerisi gerektiren problemleri çözmeleri önerilmiştir. Ayrıca matematikte önemli bir yere sahip olan semboller, niceleyiciler gibi matematiksel dil argümanlarının öğretim programlarında daha çok vurgulanmasının gerektiği ifade edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Lineer cebir, İlkel satır işlemleri, Matematik öğretmen adayları, Hata.

<sup>1</sup> Öğr. Gör. Dr., Anadolu Üniversitesi, [mkoparan@anadolu.edu.tr](mailto:mkoparan@anadolu.edu.tr)

<sup>2</sup> Arş. Gör., Anadolu Üniversitesi, [osmanbagdat@anadolu.edu.tr](mailto:osmanbagdat@anadolu.edu.tr)

## GİRİŞ

Lineer cebir, temel kavramları matematiğin farklı alanlarında ve uygulamalarında kullanımı sonucu ortaya çıkmış önemli bir derstir. Bu nedenle dersin kökleri sayılar teorisi (hem elementer hem cebir), geometri, soyut cebir (gruplar, halkalar, alanlar, Galio teori), analiz (diferansiyel denklemler, integral denklemler ve fonksiyonel analiz) ve fizik gibi alanlara dayanmaktadır. Ayrıca lineer cebiri içeren kavramlar ve işlemler, matematiğin dışında anatomi, genetik, kimya, mühendislik ve ekonomi gibi geniş bir alanda kullanılmaktadır. Lineer cebirin temel kavramları arasında lineer denklemler, matrisler, determinantlar, lineer bağımsızlık, boyut, bilineer formlar, ikinci dereceden formlar, iç-çarpım uzayları ve vektör uzayları bulunmaktadır.

Lineer cebir, öğrencilerin birçok öğrenme güçlüğüyle yüz yüze geldiği matematik alanlarından birisidir (Hillel & Sierpinska, 1993; Dorier & Sierpinska, 2001). Bu nedenle, nasıl öğrendiği ve öğretildiği gibi sorulara cevap aramak önemlidir. Eğitim araştırmalarında özellikle son yıllarda lineer cebir üzerine yapılan çalışmaların arttığı görülmektedir (Dorier, 2002). Aydın (2009) bu çalışmaların a) öğrencilerin öğrenme zorluklarının bazı sebeplerini ortaya çıkarmak ve yeni programlar geliştirmek için yapılan tarihsel incelemeler, b) lineer cebirde geometri kullanımını dengelemeyi amaçlayan ve lineer cebirin formal yapısı gibi konular üzerinde yapılan bilişsel esneklik (cognitive flexibility) araştırmaları, c) yazılım programları ile yapılan lineer cebir öğretiminin değerlendirilmesi olarak sınıflandırılabilirliğini ifade etmiştir.

Lineer cebir doğası gereği soyut ve teorik bir derstir. Öğrenciler bu derste birçok yeni kavram ve tanımla karşılaşmaktadırlar. Yapılan çalışmalar (örn. Britton & Henderson, 2009) öğrencilerin özellikle bu kavram ve tanımları öğrenmede ve anlamlandırmada çeşitli zorluklar yaşadıklarını ortaya koymaktadır. Haddad (1999) lineer cebirde karşılaşılan öğrenme zorluklarını lineer cebirin doğası ve öğretimi ve öğrenimi, öğrencilerin soyut düşünme yetersizliğine dayalı karşılaştıkları zorluklar, konunun temel aksiyonları ve matematiğin temellerinden yoksun olmaları olarak üç kategoriye ayırmıştır. Harel'e göre (1989a) temel notasyonların öğrenme zorluklarının nedeni matematiğin temellerini zayıf bir kavramsal temel üzerine soyut bir yapı inşa etme girişimidir. Diğer yandan, öğrenciler kavramsal bir anlayış olmadan işlem yapmaktadırlar (Harel, 1989b). Carlson (1993) öğrencilerin genellikle basit hesaplama algoritmalarını içeren görevlerde başarılı olduklarını (matris çarpımı ve basit lineer denklem sistemleri), lineer bağımsızlık ve dönüşümlerle ilgili görevlerde hata yaptıklarını ifade etmektedir.

Hillel ve Sierpinska (1993) lisans düzeyinde kanıtla duyulan ihtiyaç, kanıt teknikleri gibi kanıtla ilişkili sorunlar, gerek ve yeter koşulları karıştırma, niceleyiciler gibi genel sorunların yanında lineer cebire özgü kavramsal zorluklar olduğunu ifade etmişlerdir. Bu zorlukları 1) farklı seviyelerdeki tanımlar, 2) temsil sorunu ve 3) genel teorinin uygulanabilirliği olmak üzere üç başlık altında ele almıştır.

Erçerman (2008) lise öğrencileri ile yapmış olduğu çalışmada öğrencilerin genellikle bazı kuralları ve yapılması gereken işlem adımlarını ezberlediklerini ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin ayrıca matematik dilini kullanmaya dair zorluk yaşadıkları çeşitli çalışmalar (örn. Birinci, Delice ve Aydın, 2014) sonucunda ortaya çıkmıştır.

Dorier vd. (2000) öğrencilerin yaşadıkları zorlukların en temel sebepleri arasında formalizm sorunu olduğunu ifade etmişlerdir. Özellikle mantık ve küme teorisindeki eksikliklerin öğrencilerin hatalar üretmelerine neden olduğunu belirtmişlerdir. Bu amaçla "meta-level activities" olarak adlandırdıkları, öğrencilerin lineer cebir dersini öğrenmeye başlamadan önceki bilgilerini bu ders içinde kullanabilmeleri ve lineer cebir kavramlarını öğrenmede yeterli düzeye gelebilmeleri için belirli öğretim metotlarının kullanıldığı etkinlikler kullanmışlardır (Aydın, 2009).

İşlemler (Prosedürler), bir bütün olarak kavranması gereken algoritmik yapılara sahiptir. Bir prosedür izlenirken, işlemler aşamalı olarak mantıksal bir şekilde ele alınır ve bir sonuca ulaşılır. Örneğin, bir matrisin rankını bulma ve doğrusal denklem sistemini içeren bir görevde ilkel satır işlemleri kullanılarak çözüm bulunur. Bu prosedür, her biri matematiksel simgeler kullanılarak gösterilmesi gereken sınırlı sayıda kuralın kullanılmasını gerektirir. Bu çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmen adaylarının ilkel satır işlemleri kullanılan bazı lineer cebir problemlerinde yaptıkları hataları ortaya çıkarmaktır.

## YÖNTEM

Araştırmada öğrencilerin matris işlemlerinde, lineer denklem sistemleri ve bazı soruların çözümünde ilkel satır işlemlerini kullanma becerilerinde yaptıkları hataları derinlemesine incelemek amaçlandığı için nitel bir yaklaşım benimsenmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Çalışmanın katılımcı grubunu, Türkiye’de bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan 81 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırma lineer cebir dersinde gerçekleştirildiği için ikinci sınıf öğrencilerinin tamamı araştırmaya katılmışlardır.

Veri toplama aracı olarak kullanılmak üzere dört açık uçlu sorudan oluşan bir lineer cebir sınavı uygulanmıştır. Soruların hazırlanmasında öncelikle alan yazın taraması gerçekleştirilmiş, ardından matematik eğitiminde uzman bir araştırmacıdan görüş alınmıştır. Soruların amaçları Tablo 1’de verilmiştir.

**Tablo 1.** Açık uçlu sorular

Soru	Sorunun Amacı
Soru 1	Bir matrisin rankını bulma
Soru 2	Bir kare matrisin tersini bulma
Soru 3	2x2 tipindeki bir A kare matrisinde satırlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrisin determinantının $-\det(A)$ olduğunu gösterme
Soru 4	4 bilinmeyenli 4 denklemden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünün bulunması

Analiz iki aşamalı gerçekleştirilmiştir. İlk olarak sınavda sorulan soruların çözümlerinin analizi yapılmış, yanıtlar genel bir performans elde edilmek için tam doğru yanıt, kısmen doğru yanıt, yanlış yanıt ve yanıt yok şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmada temel alınan bileşenler şunlardır:

*Tam Doğru Yanıt* : Cevabın tüm bileşenlerini içeren,

*Kısmen Doğru Yanıt* : Cevabın tüm bileşenlerini içermeyen,

*Yanlış Yanıt* : Cevapla ilgisi olmayan ya da yanlış bilgi içeren, kavram yanlışlığı içeren veya mantıksız cevap,

*Yanıt yok* : Cevabı boş bırakma.

Soruya ilişkin genel bir yorum elde edilmek için yapılan ilk analizin ardından ikinci bir analiz gerçekleştirilmiştir. Tematik olarak gerçekleştirilen bu ikinci aşamada her bir soruya ilişkin hatalar temalar altında toplanmıştır. İki araştırmacı tarafından bağımsız olarak belirlenen temalar için görüş birliği sağlanmıştır. Analiz tablolar aracılığıyla sunulmuş, bulgularda öğrenci cevaplarına ilişkin doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

## BULGULAR

Bulgular bölümü öğrencilerin sorulara ilişkin genel durumu ve öğrencilerin her bir sorudaki hatalarının analizi olmak üzere iki başlık altında ele alınmıştır.

### Öğrencilerin Sorulara İlişkin Genel Durumu

Gerçekleştirilen ilk analiz doğrultusunda öğrencilerin verilen her bir soruya ilişkin genel performansları Tablo 2'de sunulmuştur.

**Tablo 2.** Öğrencilerin sorulara ilişkin performansları

Sorular	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Yanıt Yok
1	%32,09	%54,32	%13,58	%0
2	%16,04	%59,25	%22,22	%2,46
3a	%80,24	%3,70	%13,58	%2,46
3b	%85,18	%11,11	%3,70	%0
4	%46,91	% 45,67	%3,70	%3,70

Tablo 2'de verilen sonuçlar incelendiğinde en az doğru cevabın verildiği ve dolayısıyla en çok yanlış cevabın verildiği sorunun ikinci soru olduğu görülmektedir. Bu soruda öğrenciler, mantıksal bir ilerleyişle ilkel satır işlemlerini uygularken zorlanmışlardır. Bu sebeple, çoğu öğrenci başta işlem hatası olmak üzere bir takım hatalar yapmıştır. Bu hatalar ayrıntılı bir şekilde aşağıda incelenmiştir.

En yüksek doğru cevabın verildiği soru ise 3b sorusudur. En az yanlış cevabın verildiği sorular 3b ve dördüncü sorulardır. Bu sorularda öğrenciler, genelde üniversite eğitiminden önceki bilgilerini kullanarak soruları cevaplamışlardır.

Kısmen doğru cevabın en büyük yüzdesi ikinci sorudadır ve onu birinci soru izlemektedir. En çok yanıtı bırakılan soru dördüncü sorudur. Birinci ve 3b sorularına cevap vermeyen hiçbir öğrenci yoktur. İkinci soru ve 3a sorularına hiç yanıt vermeyen öğrencilerin sayıları ise eşittir.

### Öğrencilerin Her Bir Sorudaki Hatalarının Analizi

Gerçekleştirilen ikinci analiz öğrencilerin her bir soruda vermiş oldukları yanlış yanıtlarının analizini kapsamaktadır. Bu doğrultuda öğrencilerin yaptıkları hatalar her bir soru için ayrı ayrı sınıflandırılarak detaylı bir şekilde sunulacaktır.

Öğrencilerin bir matrisin rankını bulma sorusundaki hataları Tablo 3'de görüldüğü gibi beş tema altında toplanmıştır.

**Tablo 3.** Bir matrisin rankını bulmadaki öğrenci hataları

Temalar	f
İlkel satır işlemleri uygulayarak matrisi basamak biçimine getirememe	23
İlkel satır işlemlerini uygularken işlem hatası yapma	15
Rankı kare matrise kısıtlama	5
İlkel satır işlemlerinin dışına çıkma	2
Rankı doğru belirleyememe	2

Tablo 3 incelendiğinde öğrencilerin bir matrisin rankını bulmak için ilkel satır işlemleri uygulayarak matrisi basamak matris biçimine getirmekte zorlandıkları elde edilen en belirgin hatadır. Şekil 1’de bir öğrencinin verilen A matrisinin rankını ilkel satır işlemleri uygulayarak basamak biçimine getirmeden rankını yanlış hesaplaması örnek olarak verilmiştir.

**Şekil 1.** Bir matrisin rankını bulmaya ilişkin bir öğrenci hatası

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 8 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & 25 \\ -5 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_2 \rightarrow S_2 + S_1 \\ S_3 \rightarrow S_3 - S_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & 25 \\ 0 & -14 & 42 & 122 \\ 0 & 21 & -63 & -100 \end{pmatrix}$$

Öğrencilerin en çok yaptığı ikinci hata ilkel satır işlemlerini uygularken yaptıkları işlem hatalarıdır. Beş öğrenci ise bir matrisin rankını belirlemeyi sadece kare matrislere sınırlamıştır. Bir öğrencinin verilen A matrisi bir kare matris olmadığı için rankının olmadığını söylemesi örnek olarak sunulabilir:

**Şekil 2.** Kare matrise ilişkin bir öğrenci hatası

1)  $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 8 & 25 \end{pmatrix}$  A matrisi bir kare matris değildir, o yüzden rankı yoktur.

Ayrıca iki öğrenci ilkel satır işlemlerini uygularken olmayan işlemler uygulayarak soruyu çözmeye çalışmıştır. İki öğrenci ise ilkel satır işlemleri uygulayarak matrisi basamak biçimine getirmesine rağmen matrisin rankını doğru yazamamıştır.

Öğrencilerin bir kare matrisin tersini bulma sorusundaki hataları Tablo 4’de sunulduğu gibi üç tema altında toplanmıştır.

**Tablo 4.** Bir kare matrisin tersini bulma sorusundaki öğrenci hataları

Temalar	f
İlkel satır işlemlerini uygularken işlem hatası yapma	37
İlkel satır işlemlerinin dışına çıkma	4
İlkel satır işlemleri uygularken matrisin rankını yanlış hesaplama	4

Tablo 4 incelendiğinde öğrencilerin bir kare matrisin tersini bulmada ilkel satır işlemlerini uygularken en çok işlem hatası yaptıkları görülmektedir. Diğer hatalar ise ilkel satır işlemlerinin dışına çıkma ve ilkel satır işlemlerini uygularken tersini bulacakları matrisin rankının birim matrisin rankına denk olmadığından tersinin olmadığını ya da singüler matris olduğunu söylemeleridir.

Şekil 3’de bir öğrencinin bir kare matrisin tersini bulmada ilkel satır işlemlerini uygularken  $S_2 \rightarrow -5S_3 + 3S_2$  ve  $S_3 \rightarrow 3S_1 - 4S_3$  gibi ( ilkel satır işlemlerinde olmayan) ilkel satır işlemlerinin dışına çıkarak ikinci soruya verdiği cevabı göstermektedir.

Şekil 3. İkinci soruya ilişkin bir öğrenci hatası

Öğrencilerin 2x2 tipindeki bir A kare matrisinde satırlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrisin determinantının  $-\det(A)$  olduğunu göstermeye yönelik soruya ilişkin hataları Tablo 5'deki gibi üç tema altında toplanmıştır.

Tablo 5. 3a sorusundaki öğrenci hataları

Temalar	f
Genelden özele indirgeme	7
Tersini bulmaya çalışma	5
3x3 tipindeki matris için yapma	3

Tablo 5 incelendiğinde öğrencilerin 2x2 tipindeki bir A kare matrisinin satırlarının yer değiştirilmesi işlemi uygulandığında elde edilen matrisin determinantının  $-\det(A)$  olduğunu göstermede yapılan en çok hatanın, genelden özele indirgeyip 2x2 tipinde özel bir matris (2x2 tipinde kendi matrisini yazarak) seçerek o matris üzerinde işlem yapması olmuştur. Şekil 4'de bir öğrencinin kendi oluşturduğu A matrisine dayalı olarak sadece bir matris için  $-\det(A)$  olduğunu göstermesi örnek olarak sunulmuştur.

Şekil 4. 3a sorusuna ilişkin bir öğrenci hatası

Ayrıca beş öğrenci de 2x2 tipindeki matrisine ilkel satır işlemi uygulayarak elde ettiği matrisin determinantının hesabı yerine 2x2 tipinde matrisin tersini bulma işlemini uygulayarak sonucu bulmaya çalışmıştır. Şekil 5’de bir öğrencinin 2x2 tipindeki matrisin tersini bularak -det (A) olduğunu göstermesi örnek olarak sunulmuştur.

**Şekil 5.** 3a sorusuna ilişkin bir öğrenci hatası

3)  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix}$   $A = \begin{pmatrix} m & n \\ x & y \end{pmatrix}$  olsun

2x2 tipindeki matrisin  $\det(B) = \frac{1}{n-y} \begin{pmatrix} n & -y \\ -m & x \end{pmatrix}$   $\det(B) = -\det(A)$

$\det(A) = \frac{1}{m-y} \begin{pmatrix} y & -n \\ -x & m \end{pmatrix}$

Bu soruda ayrıca, 2x2 tipindeki bir kare matrisi için işlem yapılması belirtildiği halde iki öğrenci 3x3 tipindeki bir kare matris için işlem yapmıştır.

Öğrencilerin dört bilinmeyen ve dört denklemden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünün bulunmasına yönelik soruya ilişkin hataları Tablo 6’daki gibi üç tema altında toplanmıştır.

**Tablo 6.** Bir lineer denklem sisteminin çözümünün bulunmasına yönelik soruya ilişkin öğrenci hataları

Temalar	f
İlkel satır işlemlerini uygularken işlem hatası yapmak	33
İlkel satır işlemleri uygulayarak katsayılar matrisini basamak biçimine getirememek	5
İlkel satır işlemlerinin dışına çıkmak	3

Tablo 6 incelendiğinde öğrencilerin dört denklem ve dört bilinmeyenden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünde yine en çok yaptıkları hata, katsayılar matrisine ilkel satır işlemleri uygulayarak katsayılar matrisini basamak matris biçimine dönüştürürken yaptıkları işlem hatalarıdır. Bu soruda da dikkat çeken durum öğrencilerin ilkel satır işlemlerinin dışına çıkarak soruyu çözmeye çalışmalarıdır.

Dikkat çeken bir diğer durum 3b sorusu kapsamında öğrencilere dördüncü mertebeden bir kare matrisin determinantının hesabının sorulması ile ilgilidir. Bu soruyu özel kılan durum ise verilen kare matrisine bir ilkel satır işlemi uygulayarak matrisin altüçgensel matrisine dönüşmesidir. Bu soruyu altüçgensel matrisine dönüştürerek çözen sadece iki öğrenci olmuştur. Bu nedenle de bu sorunun hata analizi yapılmamış, hatalarının neredeyse tamamının eş çarpan yardımıyla determinant hesaplanırken yapılan işlem hataları olduğu saptanmıştır. Bu duruma ilişkin bir örnek Şekil 6’da görülmektedir.

**Şekil 6.** 3b sorusunu ilkel satır işlemleri yardımıyla çözen öğrenci

Handwritten student work showing a 4x4 matrix A and its row reduction. The matrix A is:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . The student has performed row operations:  $S_2 \rightarrow -2S_1 + S_2$ , resulting in a new matrix:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . The student has also written "4x4" and "det(A) = 12". There are some additional notes in Turkish on the right side of the page.

Öğrencilerin her bir sorudaki hatalarına genel bir şekilde bakarsak, tüm sorularda yaptıkları en bariz hata her bir sorunun çözümü için ilkel satır işlemlerini uygularken yaptıkları işlem hatalarıdır. Bir diğer önemli hata ilkel satır işlemleri uygulayarak matrisi basamak biçimine getirememektir. Bu hatalar öğrencilerin ilkel satır işlemlerini bildikleri halde bu işlemleri uygularken yaptıkları cebirsel işlem hatalarıdır. İlkel satır işlemlerinin dışına çıkma, rankı kare matrislere sınırlamak ve genelden özele indirgeme gibi hataların ise kavramsal bilgi eksikliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Öğrencilerin lineer cebir dersinde bazı soruların çözümünde kullanılan ilkel satır işlemleri üzerinde yaptıkları hataların analizlerinden elde edilen bulgular, öğrencilerin genel anlamda ilkel satır işlemlerini uygularken işlem hatası yaptıklarını ortaya koymaktadır. Öğrenci çözümlerinde sıklıkla karşılaşılan bir diğer bulgu ise öğrencilerin verilen problemin çözümünde kilit rol oynayan bir kavramın veya gerekli olan bilginin eksikliğinden kaynaklı hatalar yapmalarındadır. Bir matrisin rankını hesaplamak için o matrisi ilkel satır işlemleri uygulayarak basamak biçimine getirememeleri bu duruma örnek olarak verilebilir. Başka bir örnekte ise bazı öğrencilerin ilkel satır işlemlerinin dışına çıkmaları ve bir matrisin rankını hesaplarken verilen matrisin kare matris olmadığından rankı yoktur cevabını verdikleri görülmektedir. Bu hatanın sebebi belki sadece kare matrislerin tersinin olduğu bilgisini matrisin rankını bulmaya uyarlaması olabilir. Öğrencilerin kavramsal bilgi eksikliklerinden dolayı yaptıkları hatalar çeşitli çalışmalarda da ortaya çıkan bir sonuçtur (Ayдын, 2007; Dorier, 1998; Erçerman, 2008).

Bulgular, bazı öğrencilerin üniversite öğreniminden önceki bilgilerini kullanma eğiliminde olduğunu göstermektedir. Örneğin 4. soruda lineer denklem sistemini sistematik bir şekilde çözmek yerine verilen denklemlerde bilinmeyenleri bulmaya çalıştıkları görülmüştür. Stewart (2017) lineer cebirin ilk yıllarının matris, determinant bulma gibi işlem ağırlıklı olduğunu, öğrencilerin kavramsal öğrenmenin bundan daha fazlasını gerektirdiğini çok geç anladıklarını belirtmiştir. Erçerman lise öğrencileri ile yapmış olduğu çalışmada (2008) öğrencilerin sınırlı kavramsal bilgiye sahip olduklarını ve sorularını genelde işlemsel bilgilerle çözdüklerini, daha çok kuralları ezberlediklerini ortaya çıkarmıştır. Baştürk'ün (2005) yapmış olduğu bir çalışmada da yine öğrencilerin üniversite matematiğinde "niçin" sorusunun önemli olduğunu, liselerdeki matematikte ise detaya inmeden soruları çözmenin, sadece gerekli formüllerin ve temel bilgilerin nasıl ezberleneceğinin öğretildiğini belirtmişler; üniversite matematiğini çok soyut bulduklarını, ispatlayınız, yorumlayınız, gösteriniz şeklindeki sorulardan hiç hoşlanmadıklarını ifade etmişlerdir. Lise döneminde böyle bir eğitim sürecinden geçen öğrencilerin üniversite düzeyindeki bilgileri anlamlandıramamaları kaçınılmazdır.

Öğrencilerin matris parantezi gösterimleri yerine determinant parantez gösterimi kullandıkları ve ilkel satır işlemlerinde bir sonraki adımı gösteren "~" sembol yerine "=" veya "→" sembolü kullandıkları da belirlenen diğer hatalardandır. Bu durum,



öğrencilerin matematik için önemli olan gösterim ve dilini kullanımına dikkat etmedikleri ve önem vermediklerini göstermektedir. Birinci, Delice ve Aydın (2014) yapmış oldukları çalışmada en çok karşılaşılan sembolik hatanın matris sembolü ile determinant işaretini karıştırmaları olduğunu, ayrıca bazı öğrencilerin “~” işareti yerine “=” veya “→” işaretini kullandıklarını belirtmişlerdir. Akyıldız ve Çınar (2016), Wavro, Sweeney ve Rabin (2011) yapmış oldukları çalışmalarda öğrencilerin cebirsel dili kullanmadaki yetersizliklerine vurgu yapmışlardır. Aydın (2009) ve Dorier de (2002) lineer cebirde kullanılan dillerin çeşitliliği ve temsilin semiyotik ifadesinin lineer cebir öğrenmedeki temel zorluklardan bir tanesi olduğunu belirtmiştir.

Öğrencilerin çözümlerinde karşılaşılan en çok hata, yaptıkları işlem hatalarıdır. Bu işlem hatalarının bazı sebepleri olabilir. Birincisi, ilkel satır işlemlerinin bir bütün olarak kavranması gereken bir yapıya sahip olması ve işlemlerin aşamalı olarak mantıksal bir şekilde ele alınıp bütüncül olarak bir sonuca ulaşmayı gerektirmesi, ikincisi öğrencilerin en basit işlemlerde bile teknolojiyi çok sık kullanmaları üçüncüsü ise öğrencilerin işlem becerilerini artıracak klasik sınavlar yerine daha çok test sınavı ile karşılaşmalarından kaynaklanıyor olabilir.

Bir başka sonuç ise, öğrencilerin bir problemde kullandığı bir bilgiyi başka bir probleme transfer edememesidir. Örneğin, 3b determinant hesaplama sorusunda öğrencilerin neredeyse hepsi soruyu klasik eş çarpan yardımıyla çözmüştür. Sadece iki öğrenci verilen kare matrise bir ilkel satır işlemi uygulayarak matrisi altüçgensel matrise dönüştürerek soruyu çözmüştür.

Öğrenciler lise yıllarında sınav sistemine dayalı bir eğitim sonucunda üniversitelere gelmektedirler. Bu eğitimde daha çok algoritmik işlemler ve bu işlemlerin hızlı bir şekilde yapılması beklenmektedir. Harel ve Sowder (2005), Uhlig (2003) ve Stewart'ın (2017) ifade ettiği gibi öğretmenlerin lise düzeyinde kavramsal sorular ve kanıtlama becerisi gerektiren problemleri çözmeleri önerilebilir. Özellikle öğretim programlarında öğrencilerin kavramsal anlamalarını sağlayacak kazanımlara daha çok vurgu yapılması sağlanabilir. Ayrıca matematikte önemli bir yere sahip olan semboller, niceleyiciler gibi matematiksel dil argümanlarına öğretim programlarında daha çok yer verilebilir.

### **KAYNAKÇA**

- Akyıldız, P., ve Çınar, C. (2016). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik tutumları ve alan dili yeterliklerinin incelenmesi. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 14(1), 1-22.
- Aydın, S. (2007). Bazı özel öğretim yöntemlerinin lineer cebir öğretimine etkileri. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 6(19), 214-223.
- Aydın, S. (2009). Lineer cebir eğitimi üzerine. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(1), 93-105.
- Baştürk, S., (2005). Üniversite matematik bölümü öğrencilerinin Türkiye'deki matematik eğitimi hakkındaki çağrışımları: Lise, dersane Ve üniversite boyutunda, *I. Fen ve Matematik Öğretmenleri Sempozyumu*, İstek Vakfı Okulları, İstanbul.
- Birinci, D. K., Delice, A., ve Aydın, E. (2014). University students' solution processes in systems of linear equation. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 152, 563-568.
- Britton, S., & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 963-974, DOI: 10.1080/00207390903206114.
- Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: Must the fog always roll in?, *College Mathematics Journal*, 12(1) 29-40.

- Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 275-276, 141-160.
- Dorier, J. L., & Sierpiska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Krichgraber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J. L. (2002). Teaching linear algebra at university, *ICM Proceedings, III*, 1-3.
- Erçerman, B. (2008). *Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin lineer cebir bilgilerinin değerlendirilmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van, Türkiye.*
- Haddad, M. (1999). *Difficulties in the learning and teaching of linear algebra – A personal experience*. Unpublished Master Dissertation, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.
- Harel, G. (1989a). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), s.139-148.
- Harel, G., (1989b). Applying the principle of multiple embodiment in teaching linear algebra: Aspect of familiarity and mode of representation, *Schools Science and Mathematics*, 89(1), 40-57.
- Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 27-50.
- Hillel, J., & Sierpiska, A. (1993). On one persistent mistake in linear algebra. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal, 3, 65-72.
- Stewart, S. (2017). School algebra to linear algebra: Advancing through the worlds of mathematical thinking. In *And the Rest is Just Algebra* (pp. 219-233). Springer International Publishing.
- Wawro, M., Sweeney, G. F., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), 1-19.
- Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and its applications*, 361, 147-159.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (11. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.