ANALYSIS OF COMPONENTS OF PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE: CONTENT KNOWLEDGE AND KNOWLEDGE OF LEARNERS

PEDAGOJİK ALAN BİLGİSİ BİLEŞENLERİNİN İNCELENMESİ: ALAN BİLGİSİ VE ÖĞRENCİ BİLGİSİ[1]

Mustafa GÖK[2]

Abstract

The purpose of this study is to analyze the knowledge of prospective elementary mathematics teachers regarding the group from mathematical systems within the context of components of Pedagogical Content Knowledge (PCK) and knowledge of learners. Descriptive analysis, a qualitative research method, was employed. Participants of the study were 3 prospective teachers studying at the department of mathematics education at a state university, who were chosen on a volunteer basis by the method of purposive sampling. The data were collected by cam-recording the clinical interviews made with participants. Results of the study revealed that content knowledge of prospective teachers is insufficient meanwhile such content knowledge is unable to be used through association within various contexts. It was confirmed in the study that the prospective teachers who have been determined to possess some knowledge of pupils are not able to correct pupils' errors due to the deficiency of proper strategies in their content knowledge. It is projected that when prospective teachers obtain a powerful grasp of their field, it would directly be reflected on the development of proper strategies against errors related to knowledge of learners.

Keywords; Pedagogical content knowledge, content knowledge. knowledge of learners, prospective teachers.

Özet

Bu çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematik sistemlerden grup konusu ile ilgili bilgilerini Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) bileşenlerinden alan bilgisi ve öğrenci bilgisi bağlamında incelemektir. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcıları bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 3 öğretmen adayı olup, bu kişiler gönüllülük esasına göre amaçlı örneklem metoduyla belirlenmiştir. Veriler katılımcılarla yapılan klinik görüşmelerin video kamera ile kayıt edilmesi yoluyla toplanmıştır. Araştırmanın sonuçları, öğretmen adaylarının grup konusuyla ilgili alan bilgilerinin yetersiz olduğunu ve bu bilgilerin farklı bağlamlarda ilişkilendirilerek kullanılamadığını göstermiştir. Öğrenci bilgisine az da olsa sahip olduğu belirlenen öğretmen adaylarının öğrencilerin hatalarını düzeltebilecek uygun stratejiyi alan bilgisindeki eksiklikler nedeniyle gerçekleştiremedikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının güçlü alan bilgisine sahip olmalarının öğrenci bilgisiyle ilgili hatalara karşı uygun strateji geliştirmede olumlu yansımaları olacağı öngörülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Pedagojik alan bilgisi, alan bilgisi, öğrenci bilgisi, öğretmen adayları.

[1] Bu çalışmanın bir kısmı 2-4 Ekim 2013 tarihlerinde Diyarbakır'da yapılan International Perspectives on New Aspects of Learning in Teacher Education (IPALTE 2013) adlı kongrede sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

[2] Arş.Gör., Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi ABD, mustafagok@yyu.edu.tr

Giriş

Yirminci yüzyılın ikinci yarısından itibaren sosyal bilimlerdeki (özellikle psikoloji alanındaki) gelişmeler eğitim ve öğretim faaliyetlerini derinden etkilemiştir (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2010). Öğretimde geleneksel yöntemlerin toplumun gereksinmelerini karşılamada yetersiz kalmasıyla (Zembat, 2013) birlikte araştırmacılar, çalışmalardan elde ettikleri bulgular doğrultusunda öğretim modellerini ortaya çıkarmışlardır. Bu tarz bir oluşumun temel sebebi, hem öğrenmenin etkili bir şekilde gerçekleştirilmesi hem de geleneksel yöntemlerle öğretilemeyen kavramların ve becerilerin öğrenilmesini sağlamak olarak ifade edilebilir (Altun, 2012). Ancak sadece öğretim modelini değiştirerek etkili bir öğretim gerçekleştirmenin zor olduğu söylenebilir. Öğretim modelleriyle birlikte öğretmenlerin sahip olmaları gereken bilgiler de işe koşularak etkili öğrenmeler daha kolay gerçekleştirilebilir. Shulman'ın (1986) öğretmenlerle ilgili çalışmasında ortaya attığı Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) bu doğrultuda kullanılabilecek bilgilerden biridir.

Lee Shulman 1985 yılında Amerikan Eğitim Araştırmaları Derneği başkanı olduğu dönemde ilk kez PAB teriminden bahsederek (Marks, 1990), öğretimde olması gereken bazı durumların gözden kaçırıldığını vurgulamış ve 1986 yılındaki çalışmasında da PAB olarak adlandırdığı yeni bir bilgi türünü literatüre kazandırmıştır. PAB'ı, alan bilgisini öğretebilmek için alan bilgisinin daha çok konu ile ilgili yönünü somutlaştıran, alan bilgisinin özel bir şekli olarak açıklamıştır. Bu açıklamada, öğretimde alan bilgisinin yalnız başına yeterli olmadığını, bununla birlikte bir konu alanındaki kavramların en kullanışlı gösterim formlarını, en güçlü analojilerini, resimlerini, örneklerini ve açıklamalarını, bir başkasına konuyu anlaşılır kılan gösterimlerini ve öğretim yöntemlerini içeren çeşitli bilgilerin de bilinmesi gerektiğini ifade etmiştir (Shulman, 1986). Ayrıca bahsedilen çalışmada, öğretmenlerin sahip olması gereken bilgilerin alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve müfredat bilgisi şeklinde sınıflandırılması gerektiği de vurgulanmıştır.

Shulman bundan bir yıl sonraki çalışmasında ise öğretmenlerin sahip olması gereken bilgilerin sayısını arttırarak yedi kategoride incelemiş ve bu bilgiler arasındaki farklılığı da ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Burada öğretmenlerin sahip olması gereken bilgiler a) alan bilgisi, b) pedagojik alan bilgisi, c) müfredat bilgisi, d) pedagoji bilgisi, e) öğrencilerin ve onların özelliklerinin bilgisi, f) eğitimsel bağlamların bilgisi ve g) eğitim ile ilgili amaçlar, hedefler, değerler ve onların felsefi, tarihsel temelleri şeklinde ifade edilmiştir (Shulman, 1987).

Shulman'ın ifade ettiği kategoriler arasında en dikkat çekici olan PAB ile ilgili daha sonra birçok araştırmacı farklı branşlarda geniş bir alanda çalışmalar yapmıştır (Grossman, 1990; Marks, 1990; Even & Tirosh, 1995; Hill, Ball & Schilling, 2008). Bu çalışmalarda araştırmacılar PAB'ı farklı farklı alt bileşenlerine ayırarak kendi PAB modellerini oluşturmuşlardır (Shulman, 1987; Grossman, 1990; Marks, 1990).

Shulman (1986) alan bilgisini, öğretmenin zihninde var olan bilginin miktarı ve organizesi olarak ifade etmiştir. Alan bilgisinin içerisinde matematik öğretiminin amaçları, verilen bir konunun öğrenimi için karar verme, verilen bir konudaki önemli kavramların öğretimi, verilen bir konu için ön öğrenmelerinin bilgisi ve tipik okul matematik problemlerini yer almaktadır (Marks, 1990). Ball (1990) ise alan bilgisini 2 kısma ayırarak incelemiştir. Bunlar matematik asli bilgisi ve matematik hakkındaki bilgiden oluşmaktadır. Matematik asli bilgisiyle öğretmenlerin kavram ve işlem bilgilerinin doğru olması, kavram ve işlemlerin altında yatan prensipleri ve manaları anlamaları ve matematiksel kavramlar arasındaki bağları anlamaları kastedilmektedir. Matematik hakkındaki bilgi ise, bir alan olarak matematiğin ve matematiksel bilginin doğası ile ilgili anlamaları içermektedir.

Öğrenci bilgisi PAB'ın en önemli bileşenlerinden biridir. Öğrenci bilgisi genel olarak öğretmenlerin, öğrencilerin sahip olduğu kavram ve ön kavramları bilmeyi ve eğer bunlarda kavram yanılgıları varsa bu kavram yanılgılarını düzeltecek şekilde strateji geliştirebilmeyi gerektirir (Shulman, 1986). Benzer şekilde National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000), öğrenenler olarak öğretmenlerin öğrencilerin bilgisine sahip olması gerektiğini vurgulamıştır. Öğrenci bilgisinin içerisinde öğrencilerin öğrenme süreçleri, öğrencilerin tipik anlamaları, öğrencilerin genel hataları, öğrenciler için konuyu zorlaştıran ve kolaylaştıran şeyler ve özel öğrenci anlamaları yer almaktadır (Marks,1990).

Bu çalışmada PAB'ın alan bilgisi ve öğrenci bilgisi bileşenlerini araştırmak için matematik sistemlerden grup ve özellikleri incelenmiştir. Bu konunun ele alınmasındaki amaç, matematik sistemlerden grup ilkokul, ortaokul ve lise müfredatlarında isim olarak bahsedilmemesine karşın, grup özellikleri olarak adlandırdığımız kapalılık, birleşme, birim (etkisiz) eleman ve ters eleman özelliklerinin okul müfredatlarında yoğun bir şekilde yer alması olarak ifade edilebilir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının matematik sistemlerden grupla ilgili PAB'ın; alan bilgisi bileşeninde a) Grup kavramı nedir? b) Herhangi bir ikili işlemde grup kavramının özelikleri uygulanabilmekte midir? c) Grup kavramı ile birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler arasında nasıl bir bağ vardır? gibi sorular, öğrenci bilgisiyle ilgili olarak da a) Öğretmen adayları öğrencilerin hatalarının ve kavram yanılgılarının ne kadar farkındalar? b) Öğrencilerin hata ve kavram yanılgılarına çözüm olabilecek şekilde strateji geliştirebiliyorlar mı? c) Öğrenciler için konuyu zorlaştıran durumlara yönelik nasıl tedbir almaktalar? gibi sorulara odaklanılmıştır.

İlköğretim matematik müfredatında matematik eğitiminin genel amaçları içerisinde yer alan "Matematiksel kavramları ve sistemleri anlayabilecek, bunlar arasında ilişkiler kurabilecek, bu kavram ve sistemleri günlük hayatta ve diğer öğrenme alanlarında kullanabileceklerdir" ifadesi matematik sistemlerin önemini ortaya koymaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2009, s.9). Diğer taraftan matematik sistemlerden grup ve özelliklerinin bahsedilen önemine karşın, bu konuyla ilgili literatürün çok sınırlı sayıda kaldığı da görülmektedir. Örneğin Coşkun, Güler ve Dikici (2011) tarafından yapılan çalışmada 9. sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusunun temelini oluşturan bölme algoritması kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerinin olduğunu tespit edilmiştir. Zaslavsky ve Peled (1996) matematik öğretmenlerinin ve aday öğretmenlerin ikili işlemin değişme ve birleşme özellikleri ile ilgili karşılaştıkları güçlükleri belirlemek amacıyla yapılan çalışmada ise, katılımcıların değişmeli olup da birleşmeli olmayan bir ikili işlemin olmayacağı şeklinde yanlış bir inanışına sahip olduğu belirlenmiştir. Moralı, Köroğlu ve Çelik'in (2004) üniversite birinci sınıftaki ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerine yaptıkları çalışmada, soyut matematik dersine yönelik tutumlar ve rastlanan kavram yanılgıları incelenmiştir. Çalışmada soyut matematik konularının 9. sınıfta temellerinin verildiği vurgulanarak katılımcıların yapılan testte başarılı olmaları beklendiği ancak araştırma sonuçlarına göre birçok öğrenme eksiklerinin olduğu ifade edilmiştir.

Üniversitelerde matematik bölümlerinde birinci sınıfta okutulan soyut matematik, cebir gibi dersler (özelde grup teori) öğrenciler için problem oluşturduğu söylenebilir. Halbuki soyut matematik dersi öğrencilere soyut kavramları anlama, önemli matematiksel prensiplerle çalışma ve ispat yapmayı öğrenme gibi fırsatlar sunmaktadır (Dubinsky, Dautermann, Leron ve Zazkis, 1994). Çoğu gelecekte öğretmen olacak bu öğrencilerin matematiksel soyutlamaları yaparken bu dersin çıktılarından faydalanmaları önemli görülmektedir. Bu nedenle matematiğin neredeyse tamamına sinmiş bir şekilde yer alan matematik sistemlerden grup özellikleriyle matematik öğretiminin ilişkili bir şekilde yapılması önemli görülmektedir. Geometri, soyut cebir, lineer cebir ve daha birçok matematik dalında grup kavramı yer almaktadır. Özellikle belli bir kümede denklemlerin çözümlerinin araştırılmasında grup teorinin çıktılarından faydalanmanın yararlı olacağı söylenebilir. Kısacası, grup konusunun matematikte geniş bir kullanım alanına sahip olması ve geleceğin öğretmeni olacak matematik öğretmen adaylarının da grup konusuna ilişkin alan bilgilerinin ve öğrenci bilgilerinin ortaya çıkarılması açısından bu çalışmanın sonuçlarının alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisi bileşenlerinden alan bilgisini ve öğrenci bilgisini matematik sistemlerden grup konusu kapsamında incelemek olarak ifade edilebilir. Belirtilen bu genel amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranmaktadır.

1. İlköğretim matematik öğretmen adayları grup kavramını nasıl tanımlamaktadır?
2. İlköğretim matematik öğretmen adayları grup kavramını ve özelliklerini farklı bağlamlarda ne ölçüde kullanabilmektedir?
3. İlköğretim matematik öğretmen adayları öğrencilerin hatalarının ne kadar farkındadır?
4. İlköğretim matematik öğretmen adayları öğrencilerin hatalarını düzeltmeye yönelik uygun strateji belirleyip, bu stratejiyi uygulayabilmekteler mi?

YÖNTEM

Matematik öğretmen adaylarının matematik sistemlerden grup konusuyla ilgili alan bilgisi ve öğrenci bilgisine ne ölçüde sahip olduklarının belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmanın verilerinin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Betimsel analizde elde edilen veriler daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanırlar. Veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir (Yıldırım & Şimşek, 2011).

Betimsel analizde görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış biçimde okuyucuya sunmaktır (Yıldırım & Şimşek, 2011).

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını, bir devlet üniversitesinde Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği 4. sınıfta öğrenim gören 3 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Öğretmen adaylarının seçiminde kullanılan ölçüt, ilköğretim matematik öğretmenliği programında yer alan “Özel Öğretim Yöntemleri I-II”, “Soyut Matematik” ve “Cebire Giriş” dersini başarıyla tamamlamış olmaktır. Gizlilik esas alındığından bulgular kısmında adayların gerçek isimleri yerine kod isimler kullanılmıştır. Örneğin Öğretmen Adayı 1 için ÖA1 kod ismi kullanılmıştır.

Verilerin Toplanması

Bu araştırmanın verilerinin toplanmasında, görüşme tekniğinin bir çeşidi olan ve matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Klinik görüşme, bilgi yapısının biçimini ve akıl yürütme sürecini araştırmak, öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek için öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeleri içermektedir (Clement, 2000). Bu doğrultuda öğretmen adaylarına 3 adet araştırma problemi hazırlanmıştır. Bu problemlerden 2 tanesi matematik eğitimi üzerine yazılmış bir kaynaktan uyarlanmış (Ususkin, Peressini, Marchisotto, & Stanley, 2003) ve diğer problem konuyla ilgili bir araştırmanın sonuçlarından uyarlanarak araştırmacı tarafından hazırlanmıştır (Zaslavsky & Peled, 1996). Soruların uygunluğu alanında uzman bir öğretim görevlisine kontrol ettirilerek soruların güvenilirliği arttırılmıştır. Ayrıca soruların tam olarak anlaşılamama olasılığına karşın alternatif ve sonda sorular da sorulmuştur (Clement, 2000). Hazırlanan sorular, araştırmada yer alan katılımcılara benzer bir öğretmen adayına uygulanarak pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışma sonucunda klinik görüşme sorularının net anlaşıldığı görülmüş, ancak bazı görüşme soruları için ek sonda sorular hazırlanarak sorular uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

İşlem

Klinik görüşmeler öğretmen adaylarının kendilerini rahat hissettikleri, sessiz bir ortamda yapılmıştır. Klinik görüşmelere başlanmadan önce, görüşme yapılacak adaylardan görüşme izni alınmış ve görüşmeler video kamerayla kayıt altına alınmıştır. Video kamera, adayların dikkatini dağıtmayacak şekilde onların kullandıkları çalışma kâğıtlarını ve araştırmacıyı görebilecek biçimde sabit olarak yerleştirilmiştir. Görüşmeler sırasında katılımcılara yöneltilen soruların yanıtına nasıl ulaştıklarının önemli olduğu açıklanarak, adaylardan sesli düşünmeleri ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Adaylara çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmış ve görüşmeler minimum 20 dakika ile maksimum 42 dakika arasında gerçekleştirilmiştir.

Veri Analizi

Verilere kolay ulaşabilmek için görüşmelerin dökümü yapılmıştır. Analiz süreci görüşme kayıtlarının dinlenmesi ve yazıya dökülmesiyle başlamıştır. Görüşme dökümleri Shulman (1986;1987), Marks (1990) ve Ball'ın (1990) çalışmalarında PAB'ın alt bileşenlerinde kullandıkları alan bilgisi ve öğrenci bilgisi temalar olacak şekilde belirlenmiştir. Bu araştırma PAB'ın alan bilgisi ve öğrenci bilgisiyle sınırlandırılmıştır. Temalar altında yer alan kodlar ilgili araştırmalardaki her temanın altında yer alan bileşenler olarak belirlenmiştir. (Giriş kısmına bakınız) Her görüşme özetlenmiş ve önemli yorumlar kaydedilmiştir. Burada matematiksel kavramların bilgisi, tipik okul problemleri için ön bilgileri bilme, temel işlemleri yapabilme, öğrenci hatalarının doğasını bilme, öğrenci hatalarına yönelik strateji geliştirebilme gibi yorumlara dikkat edilmiştir. Bulgular kısmında öğretmen adaylarının PAB'ın alan bilgisi ve öğrenci bilgisi olarak belirlenen temalardaki analiz sonuçları tablolar şeklinde her bir öğretmen adayı için ayrı ayrı verilmiştir. Ayrıca tablolarda yer alan bazı bilgiler klinik görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak desteklenmiştir. Öğretmen adaylarının kendilerine yöneltilen sorulara verdikleri yanıtlar doğru ve yanlış olarak değerlendirilmiştir. Soruda verilen duruma uyan alan bilgisi veya öğrenci hatasını ifade ederek uygun strateji ile açıklama pozisyonu doğru (bazı küçük eksiklikler olursa bunlarda göz ardı edilerek doğru kabul edilmiştir), bunların dışındaki durumlar yanlış olarak değerlendirilmiştir.

Tablo 1. Görüşme Soruları

P1. $< A, \blacksquare >$ cebirsel yapısında $A = \{0\}$ ve $a \blacksquare b = a \cdot b$ olarak tanımlanıyor. Bir öğrenci, $< A, \blacksquare >$ cebirsel yapısının bir grup olmadığını iddia ediyor. Bununla ilgili olarak,
a) Grup kavramı nedir? Açıklayınız.
b) Size göre öğrencinin yanıtı doğru mu? Neden?
P2. a,b,c sabit sayılar ve bilinmeyenin x ile gösterildiği, ax+b=c formundaki bir denklemin herhangi bir A kümesinde tek çözüme sahip olmasını garanti edecek bir yöntem arıyoruz.
a) Çözüm için nasıl bir yöntem önerirsiniz? Önerdiğiniz yöntemin dışında buna alternatif olacak başka yöntemler olabilir mi? Eğer varsa açıklayınız.
b) Bulduğunuz yöntemde denklemin kat sayıları ve bilinmeyenin arandığı küme olarak verilen A kümesi size göre nasıl yapılandırılmalıdır? Bu denklemin çözüm kümesinin arandığı küme ile çözümün varlığı arasında nasıl bir ilişki vardır?
P3. Bir öğrencinizin "herhangi bir ikili işlemde değişme özelliği varsa birleşme özelliği de vardır" şeklinde bir yanılgıya sahip olduğunu gördünüz.
a) Sizce, öğrenciniz hangi sebepten dolayı böyle bir yanılgıya düşmüş olabilir?
b) Öğrencideki bu yanılgı nasıl düzeltilebilir?

Tablo 1'de görüldüğü üzere, birinci soruda öğretmen adaylarının PAB bileşenlerinden alan bilgisi belirlenmeye çalışılmıştır. Bu soruyla grup kavramının ne olduğu ve hangi özelliklere sahip olduğu ortaya çıkarılmaya çalışılmaktadır. Ayrıca verilen işlem reel sayılar üzerinde tanımlanmayarak, öğrencilerin grup kavramını ezberden mi yoksa kavramsal olarak mı algıladıklarını tespit edilmeye çalışılmıştır. İkinci soru grup konusunun temel özelliklerinin niçin gerekli olduğunu ifade eden ve onun bir uygulama alanı olan birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusuyla ilişkilendirilerek sorulmuştur (ax+b=c denklemi tek çözüme sahip olması için <A,+> grup ve <A*,·> grup ve A*=A/{0} şeklinde ifade edilmektedir). Üçüncü soruda değişmeli olup birleşmeli olmayan dolayısıyla grup olmayan bir işlem örneği öğretmen adaylarından istenmiştir. Aşağıdaki tablo 2'de daha ayrıntılı olarak araştırma kapsamında incelenecek durumlar sunulmuştur.

Tablo 2. Problemlerin Analizlerinde Kullanılacak Alt Basamaklar

Problemler	Problemlerin Çözümüne Yönelik Aşamalar
P1	1. Grup kavramı tanımı 2. Grup özelliklerini P1'e uygulama 3. Öğrenci hatasını belirleme
P2	1. ax+b=c denklemi için bir A kümesinde toplama ve çarpma işlemleri doğrultusunda çözüm yöntemi belirleme 2. Toplama ve çarpma işlemi bağlamında bu çözümün geçerli olabilmesi için A kümesinin nasıl yapılandırılması gerektiğini belirleme 3. Farklı lineer denklem örnekleriyle bulunan yöntemi test etme
P3	1. Öğrenci hatasının nedenini tahmin etme 2. Öğrenci hatasına yönelik strateji geliştirme 3. Bulunan stratejiyi P3'e uygulama

Örneğin tablo 2'de verilen aşamalar doğrultusunda P2 problemi için beklenen çözüm yöntemi[3] aşağıda ifade edilmiştir.

a,b ve c sabit reel sayılar olmak üzere, ax+b=c denkleminin tek çözüme sahip olmasını garanti edecek bir yöntemde A kümesi aşağıdaki şartlara uygun olarak yapılandırılmalıdır.

[3] Bu çözüm yöntemi matematik eğitimi üzerine yazılan bir kitaptan uyarlanmıştır (Ususkin, Peressini, Marchisotto, & Stanley, 2003).

Adım 0: Verilenler

$$ax+b=c$$

Adım 1: Eşitliğin her iki tarafına –b ekle.

$$(ax+b)+(-b)=c+(-b)$$

Adım 2: Eşitliğin solunda toplama işleminin birleşme özelliğini kullan. (Birleşme özelliği)

$$ax+\{b+(-b)\}=c+(-b)$$

Adım 3: Eşitliğin solunda b ve –b nin toplama işlemine göre etkisiz eleman olduğunu kullan. (ters eleman özelliği)

$$ax+0=c+(-b)$$

Adım 4: Eşitliğin sol tarafında toplama işlemine göre birim elemanla ax ifadesi toplandığında sonuç ax olur.(Etkisiz eleman özelliği)

$$ax=c+(-b)$$

Adım 5: Eşitliğin sağ tarafı toplama işlemine göre kapalı olmalıdır. c-b=d olsun.

$$ax=d$$

Durum 1: Eğer a=0 olduğunda,

1. c+(-b)=0 ise denklemin tanımlandığı kümedeki eleman sayısı kadar çözüm ortaya çıkar
2. c+(-b)≠0 ise çözüm yoktur.

Durum 2: Eğer a≠0 ise yukarıda toplama için yapılan adımlar çarpma için yapılarak denklemin tek çözümü $\frac{1}{a}\cdot d$ şeklinde elde edilebilir.

Görüldüğü üzere ax+b=c biçimindeki bir denklemin tek çözümünün garanti edilebilmesi için <A,+> bir grup (Adım 1-5'den) ve <A/{0},·> yapısı da bir grup (Durum 2 den) olması gerekmektedir.

BULGULAR

Bu bölümde, ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğretmen adaylarının matematik sistemlerden grup konusuyla ilgili yöneltilen sorulara verdikleri yanıtlar PAB'ın bileşenlerinden alan bilgisi ve öğrenci bilgisi bağlamında analiz edilmiştir. Analizlerden elde edilen sonuçlar tablolarla her bir öğretmen adayı için ayrı ayrı olacak şekilde temalar doğrultusunda verilmiştir. Ayrıca tablolarda geçen bazı maddeler görüşmelerden yapılan doğrudan alıntılarla desteklenmiştir. Tablo 3'de öğretmen adayı 1'in (ÖA1) görüşme sorularına verdiği yanıtlardan alan bilgisi ve öğrenci bilgisiyle ilgili elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 3: ÖA1'in Grup Konusuyla İlgili Alan Bilgisine ve Öğrenci Bilgisine İlişkin Bilgiler

Alan Bilgisi	1. Değişme, birleşme ve kapalılık özelliğini sağlayan sistem gruptur 2. Değişme özelliği $a \blacksquare b = b \blacksquare a$ şeklindedir. 3. Birleşme özelliği üç eleman üzerinden yapılır ve toplama işleminde birleşme özelliği a+b+c=b+a+c şeklindedir. 4. ax+b=c denklemi doğru belirttiğinden grafik çizilerek çözüm yapılabilir. 5. Bir lineer denklem tümevarım yöntemiyle çözülebilir. 6. Lineer denklemlerin çözümü olmalıdır 7. (ax)+ (b-c)=0 ise ax=0 ve b-c=0 olmalıdır.

	8. Lineer denklemlerde bilinmeyen yalnız bırakılarak çözüm bulunabilir. 9. ax+b=c ifadesinde a sıfır olmayan bir tam sayı olmalıdır. 10. Özdeşliklerin çözüm kümesi yoktur 11. Çarpma işleminde değişme özelliği $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)$ şeklindedir. 12. Çarpma işleminde birleşme özelliği $a \cdot b + b \cdot c = b \cdot (a + c)$ şeklindedir 13. Bir kuralın iptali için kuralı sağlamayan bir örnek yeterlidir.
Öğrenci Bilgisi	1. Bir küme üzerinde tanımlanan bir işlem grup özelliklerini sağlıyorsa bu sistem gruptur. 2. Değişme özelliğini sağlayan bir işlemin birleşme özelliğini de sağlayacağı genellemesi yanlıştır 3. Öğrenciler değişme özelliği varsa birleşme özelliği de vardır düşüncesine toplama işlemi neden olabilir. Bu yanılgı çarpma işlemi örneği ile giderilebilir.

Tablo 3 incelendiğinde ÖA1'in yanıtlarından grup konusuyla ilgili alan bilgisine ilişkin 13 madde ve öğrenci bilgisine ilişkin 3 madde tespit edilmiştir. Alan bilgisiyle ilgili maddelerden 1, 3, 4, 5, 6 7, 9, 10, 11, 12 maddelerinin yanlış olduğu ve 2, 8, 13 maddelerinin doğru olduğu belirlenmiştir. Öğrenci bilgisiyle ilgili ikinci madde doğru diğerleri yanlıştır. Burada ilginç olan öğrenci bilgisiyle ilgili birinci maddenin ifade olarak doğru olmasına rağmen ÖA1 grup özelliklerini yanlış hatırladığı için alan bilgisindeki bilgi eksikliğinin öğrenci bilgisiyle ilgili doğru bir ifadeyi yanlış kılması olarak ifade edilebilir. (Alan bilgisinde 1.madde de grup özellikleri yanlış ifade edilmişti) Tablo 3'de görüldüğü üzere ÖA1 alan bilgisiyle ilgili pek çok yanılgıya sahiptir. Bunları aşağıda görüşmelerden alınan kesitler desteklemektedir. ÖA1'in P1 problemini çözüm süreci aşağıda verilmiştir.

A: …grubun özelliklerini bir daha hatırlayabilir miyiz? Neler vardı?

ÖA1: Birleşme özelliği, değişme özelliği ve verilen işlemin kümesinde tanımlanabilmesini sağlaması (kapalılık özelliği kastediliyor) gerekiyor. Bunlar sağlanıyorsa gruptur…Ancak bunu tam hatırlayamadım…Değişme özelliğini sağlıyor.

A: Nereden değişme özelliğini sağladığını söyledin?

ÖA1: Çünkü değişme özelliği neydi. $a \blacksquare b = b \blacksquare a$ *ise değişme özelliği vardır… a içinde b içinde 0 alabiliriz. Zaten başka bir seçeneğimiz yok.* 0·0=0·0=0 *sonuç çıkar. O zaman değişme özelliği var.*

A: Birleşme özelliği var mı sence?

ÖA1: Birleşme özelliğini daha çok üç eleman üzerinden yapıyorduk ama neydi a+b+c=b+a+c bunların yerlerini değiştirebildiğimizde toplama işleminde birleşme özelliği vardır diye biliyorduk.

A: …bu işlemde nasıl yapacağız bunu sence?

ÖA1: (Kağıda söylediklerini yazıyor) $a \cdot b$ *her tarafa 1 mi eklesek. Ya da b'ye c+1 desem. Burda yerine yazsam…*

A: Pekala buradaki işlem nedir?

ÖA1: Buradaki işlem çarpma işlemi.

A: Birleşmeyi bu işleme uyarlayabilir miyiz?

ÖA1: Uyarlayamadım.

ÖA1'in grup özelliklerini birleşme, değişme ve kapalılık özelliklerini sağlayan yapılar olarak ifade ettiği görülmektedir. Bu öğretmenin kapalılık özelliğini tam manasıyla ifade edemediği, grubun etkisiz (birim) eleman ve ters eleman özelliklerine ise hiç değinmediği belirlenmiştir. Görüldüğü üzere ÖA1'in grup kavramının özelliklerini yanlış hatırladığından dolayı grup olmayan kavramları grup olarak görme ihtimali vardır. Bu yönüyle yapılan açıklama yanlıştır. Ayrıca daha önemli sorun diyalogda rahatlıkla görüleceği gibi ÖA1'in en temel toplama ve çarpma gibi işlemlerde birleşme özelliğini gösterememesidir. Bu durum soyut matematik, cebire giriş gibi dersleri başarıyla tamamlayan bir öğretmen adayından araştırmada beklenmeyen bir durum olarak tespit edilmiştir. Öğretmenin matematiksel yapılardan grup kavramını bilmemesi grupla ilişkili diğer konularda derin eksiklikleri olabileceğine işaret etmektedir.

ÖA1'in P2 problemini çözüm sürecinde birçok yöntem denediği görülmektedir. Bu yöntemleri öğretmen adayının nasıl ortaya koyduğu aşağıda verilmiştir.

> *ÖA1: Tümevarım yönteminden biz bunların eşit olduğunu ispatlarsak tek çözüm olması gerektiğini söyleyebiliriz. Şimdi hocam x_1 şu denklem (kağıda yazıyor) ax_1+b=c diyelim. Tümevarımdan ilk değerimiz için, x=1 dersek, a+b=c çıkıyor. Ya da a=c-b de diyebiliriz. x=2 için 2a=c-b çıkacak. Böyle böyle böyle sonsuza yani x'e verdiğimiz n ya da n+1 gibi bir değerde buranın na=b-c olduğunu bulabiliriz… (çözümün buradan çıkmayacağını düşünerek başka bir yol deniyor) Benim ikinci yol aklıma gelen denklemimizin grafiğini çizmek… benim bildiğim kadarıyla ax+b=c formunda bir lineer denklemi bir doğru olarak gösterebiliriz.*
>
> ***A: Doğru olarak gösterebilirdik derken,***
>
> *ÖA1: Yani, 2 boyutlu analitik geometride 2 boyutta gösterebiliriz. Orada herhangi bir doğru üzerinden sonsuza giden x denklemi üzerinde tek çözümü olması gerekir… ax+b=c denkleminde x'i çeksek, ax=c-b buradan tek x'i çeksek, $x = \frac{c-b}{a}$ gibi bir sayı buluruz. Burada x'in eğimi belli aslında denklemin eğimi belli. O da nedir? a dır. Eğim yani tanα=a dır.*

Burada ax+b=c denklemine çözüm arandığı P2 problemine ÖA1'in öncelikle matematiksel indiksiyon yöntemiyle çözüm aradığı görülmektedir. Buradan genel bir çözüm yolu bulamayacağını anlayınca ÖA1, lineer denklemlerin doğru denklemleri olarak ifade edilerek çözülebileceğini belirttiği görülmektedir. Ancak bu denklem bu haliyle doğru denklemi belirtmemektedir. Burada grafiksel tekniklerle çözüm şöyle oluşturulabilirdi. Bu denklem yani, "ax+b=c ifadesi y=ax+b ve y=c biçiminde iki doğrunun kesişimi olarak düşünülebilir ve çözüm oluşturulabilir." şeklinde ifade edilebilirdi. Ancak böyle bir durum ortaya çıkmamıştır. Öğretmen adayı doğrudan ax+b=c ifadesini bir doğru denklemi olarak algılamaktadır. Zaten bunun devamında denklemdeki x'in kat sayısının eğim olarak ifade edilmesi bu durumu destekleyen bir işaret olarak gösterilebilir.

> ***A: $2x^2+1=0$ lineer denklem midir sence?***
>
> *ÖA1: Lineer denklem değildir. Çözüm kümesi geliştiremeyiz.*
>
> ***A: Bir tane lineer denklem yazabilir misin?***
>
> *ÖA1: $x^2+2x+1=0$ bir lineer denklemdir.*
>
> ***A: Çözüm kümesini nasıl buluruz bunun.***
>
> *ÖA1: Çözüm kümesi çarpanlara ayırma yöntemiyle bulunur. (x+1)(x+1)=0 ifadesinin eşitidir diyebiliriz…Çözüm kümesi, (x+1)(x+1)=0 ise x+1=0 a eşit. x'in değeri bellidir, -1 dir.*
>
> ***A: …bu yöntemi ele alarak genelleştirebilir miyiz acaba?***

ÖA1:…ax+b=c şimdi o zaman biz burada neye eşitledik sıfıra eşitledik. Sıfıra eşitlemek için c'yi diğer tarafa atmamız gerek. Burada ax+b-c=0 dır. (ax)+ (b-c)=0 şunların toplamı sıfır ise ya a=0 ya x=0 dır.

A: x'i bulabilir miyiz burada.

ÖA1: Burada x'i kestirmemiz çok zor gözüküyor. Yani ben x'in ne olduğunu bulamayız. En fazla yapabileceğimiz, ax=-(b-c) her iki tarafı a ile bölersek,

$\frac{ax}{a} = -\frac{(b-c)}{a}$, $x = -\frac{(b-c)}{a}$,*eksiyi de kaldırırsak,* $x = \frac{c-b}{a}$ *dir.*

A: …bunu yöntem olarak düşünebilir miyiz? Yani, değişen a,b,c lere göre her zaman x bulunur mu?

ÖA1: Bulunur. Bunu ortaokulda öğrendiğimiz… b'yi diğer tarafa atmamız ve a ile bölüp x'i çektiğimiz bir metottur.

A: a=0 olsa tek çözüm olur mu? ax+b=c denkleminde tek çözüm için A kümesini nasıl yapılandırmamız gerekir sence?

ÖA1: Hayır…a'nın alındığı küme pozitif tam sayılar kümesi ya da negatif, sıfırın kapsanmadığı bir küme.

A: …2x+1=x+x+1 bu denklemin çözüm kümesi nedir sence? Bu bir lineer denklem midir?

ÖA1: (Biraz düşünüyor) Bu bir denklem değildir. Özdeşliktir. 2x+1=2x+1 yaptığımızda gerekli sadeleştirmeyi yaparsak 0=0 olur…Herhangi bir sayı diyebilirsiniz veyahut elma diyebilirsiniz armut diyebilirsiniz. İstediğiniz nesneyi diyebilirsiniz.

A: Çözüm kümesi nedir o zaman?

ÖA1: Burada çözüm kümesi boş kümedir, yoktur.

Yukarıdaki diyalogda görülebileceği üzere, ÖA1'in bir lineer denklemi reel sayılarda çözümü olan bir denklem olarak algıladığı anlaşılmaktadır. Halbuki bazı lineer denklemlerin çözümü yoktur. (Ya da çözümü boş kümedir) Bu durum ÖA1'in alan bilgisinin ne ölçüde yetersiz olduğunu ortaya koymaktadır. ÖA1 ayrıca (x-a)(x-b)=0 iken x_1=a ve x_2=b şeklindeki cebirin temel kuralını (ax)+ (b-c)=0 biçiminde ifade ettikten sonra ax=0 ve b-c=0 yaklaşımıyla çözümlemeye çalıştığı görülmektedir. Buradan öğretmenin denklem çözümlerinde temel kavramlarla ilgili büyük ölçüde sorun yaşadığı söylenebilir. Öğretmen adayının çok zorlanarak sonunda çözümü bulduğu anlaşılmaktadır. Ancak ax+b=c denklemi için öğretmen adayının bulduğu yöntemin ne ölçüde geçerli olduğunu araştırmacı "a=0 olsa tek çözüm olur mu?" ve "2x+1=x+x+1 bu denklemin çözüm kümesi nedir?" gibi sorular sorarak öğretmen adayına test ettirmek istemiştir. Ancak öğretmen adayı burada da "a" katsayısının sıfırın dışında tamsayı olduğunu ifade ederek onun tamsayı dışındaki reel değerlerini gözden kaçırmıştır. Ayrıca tüm reel sayıların çözüm olabileceği lineer denklemlerin çözümünü yanlış bir karar vererek boş küme olarak ifade ettiği görülmektedir. Buradan ÖA1'in alan bilgisiyle ilgili derin hatalara sahip olduğu söylenebilir. ÖA1 bir lineer denklemin çözümünü zorlukla bulmuştur. Burada ax+b=c denkleminin çözümünü ortaokuldan kalma bilgilerle çözme eğiliminde olduğu belirlenmiştir. Halbuki bulunan çözümün bir A kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri altında grup özelliklerini sağlaması gerekmekteydi. Ancak işlemlerin ortaokul öğrencisi düzeyinde sıradan bir şekilde yapılmasıyla böyle bir durum ÖA1 tarafından görülememiştir. Sonuç olarak öğretmen adayı grup kavramıyla ax+b=c şeklinde ifade edilebilecek lineer denklemler arasındaki bağı yakalayamamıştır.

Tablo 3'de ÖA1'in P3 problemine verdiği yanıtlardan öğrenci bilgisine yönelik bazı çıkarımlarda bulunulmuştur. Öğrenci bilgisiyle ilgili maddelerden 2 ve 3'e dair bilgiler diyalogda aşağıdaki şekilde yer almaktadır.

A: …Herhangi bir ikili işlemde değişme özelliği varsa birleşme özelliği vardır. Sizce, öğrenciniz hangi sebepten dolayı böyle bir yanılgıya düşmüş olabilir?

ÖA1: Değişme özelliği var diye birleşme özelliği olmak zorunda değildir. Genelleme yanlıştır… Düşündüğümde o öğrencimiz bunu toplama işleminde düşünerek yapmıştır. Toplama işleminde değişme özelliği varsa birleşme özelliği de vardır diyebiliriz. Ama çarpma işleminde böyle bir şey dememiz mümkün değildir.

A: Öğrencideki bu yanılgıyı düzeltmek için nasıl bir açıklama yaparsınız?

ÖA1: Ona dediğim gibi çarpma işleminin üzerinden giderdim. Çarpma işleminin değişme özelliği olduğu halde birleşme özelliğinin olamayacağını gösterirdim.

A: Bunu örnekleyebilir misin?

ÖA1: Hocam önce değişme özelliğini gösterelim…değişme özelliği ne demiştik. Yani $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)$ *burda a ile b nin yer değiştirdiğini görüyoruz… Şurda da (sayısal değer verdiğini kastediyor) şu şekilde yaptığımızda önce* $2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$ *sağladı. Burada değişme özelliği var dedik.*

A: Birleşme özelliği var mı sence?

Birleşme özelliğini nasıl yapalım. Birleşme özelliği çarpma işlemi üzerinde nasıl tanımlayalım. $a \cdot b + b \cdot c = b \cdot (a + c)$ *eşit midir? Ortak parantezine alırsak. Nasıl yapıyorduk yaa. (yazdıklarını siliyor) Bu değişme özelliği idi. (yukarıda ilk başta yaptığını kastediyor)*

Diyalogda ÖA1'e öğrenci bilgisiyle ilgili "değişmeli özelliği olan bir işlemin birleşme özelliğinin de olması gerektiği" şeklinde yanlış bir algıya sahip olan bir öğrencinin bu algısını toplama işlemi doğrultusunda düşünmüş olabileceği ifade ediliyor. Bu açıdan doğru bir yaklaşımla duruma müdahale edildiği söylenebilir. Ancak bu durumun çarpma işlemiyle düzeltilebileceği açıklanmıştır. Reel sayılarda çarpma işlemi hem değişmeli hem de birleşmeli bir işlemdir. Görüldüğü gibi öğretmen adayı öğrencide var olan bir yanılgı için aksine örnek verme kuralını bilmesine rağmen alan bilgisindeki eksiklikler nedeniyle doğru bir örnek ortaya koyamadığı görülmektedir. Sonuç olarak öğrenci bilgisiyle ilgili son iki madde de öğretmen adayının belli ölçüde öğrencinin hatasıyla ilgili doğru bir yaklaşım ortaya koymasına rağmen alan bilgisindeki yetersizlik sebebiyle öğrenci bilgisini düzeltmeye yönelik uygun stratejiyi bulamadığı belirlenmiştir.

ÖA1'in alan bilgisinin çok yetersiz olduğu söylenebilir. Hatta toplama ve çarpma gibi en temel işlemlerde dahi birleşme özelliğini yapamadığı görülmektedir. Alan bilgisindeki bu yetersizlik nedeniyle öğrenci bilgisiyle ilgili doğru stratejileri düşünce boyutunda gerçekleştirmesine rağmen uygulamada bunları ortaya koyamamıştır.

Öğretmen adayı 2 (ÖA2)'nin araştırma kapsamında sorulara verdiği yanıtlar Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. ÖA2'nin Grup Konusuyla İlgili Alan Bilgisine ve Öğrenci Bilgisine İlişkin Bilgiler

Alan Bilgisi	1. Grup özellikleri u,v ∈W olsun. Eğer u+v ∈ W nin elemanı olursa, uv ∈ W kümesinin elemanı oluyorsa, c ∈ W ve cu ∈ W ise gruptur 2. Lineer denklemler bilinmeyen yalnız bırakılarak çözülür 3. Tanımlı olduğu kümede tek çözümü olan birinci dereceden denklemler lineer denklemlerdir. 4. Lineer denklemin tanımlı olduğu kümede işlemde kullanılan sayılar ve o sayıların verilen işleme göre tersleri de olmalıdır 5. İkili bir işlemde birleşme özelliğini (a+b)+c=a+(b+c) eşitliği varsa birleşme özelliği vardır 6.İkili bir işlemde değişme özelliğini a+b=b+a eşitliği varsa değişme özelliği vardır
Öğrenci Bilgisi	1. Grup özelliklerinden yararlanarak bir sistemin grup olup-olmadığı belirlenerek öğrenci ikna edilebilir. 2. Öğrencinin bildiği işlemler hata yapmasına neden olmuş olabilir.

Tablo 4'de görüldüğü üzere alan bilgisi kısmında 6 madde ve öğrenci bilgisi kısmında 2 madde belirlenmiştir. Alan bilgisiyle ilgili maddeler incelendiğinde 1 ve 3 maddeleri yanlış 2, 4, 5 ve 6 maddeleri doğrudur. Öğrenci bilgisiyle ilgili ilk madde yanlış, ikinci madde doğrudur. ÖA2 grup özelliklerini yanlış ifade ettiğinden öğrenci bilgisiyle ilgili birinci madde ifade olarak doğru gözükmesine rağmen yanlış olduğu görülmektedir. Tablo 4'de görüldüğü üzere ÖA2 alan bilgisiyle ilgili pek çok yanılgıya sahiptir. Bunlar görüşmelerden alınan kesitlerde kolayca görülebilmektedir. Aşağıda P1 problemiyle ilgili ÖA2'nin ifadelerine yer verilmiştir.

> *ÖA2: Ben buna geçmeden önce grup olma şartlarını size söyleyeyim. Burada a ve b kullanmış ben bunları değiştirebilirim. Mesela diyelim u ve v tamam. W kümesinin elemanları olsun…grup olması için 3 şart var. Bu 3 şartı sağlarsa gruptur. u+v de eğer W'nin elemanı olursa, şuna birinci şart diyelim. Tekrar u ve v W'nin elemanıysa uv de eğer W kümesinin elemanı oluyorsa bu da… ikinci şartımız. Üçüncü şartımızda c sabit bir sayı olsun…cu da eğer W kümesinin elemanı oluyorsa bu 3 şartı sağlıyorsa gruptur diyebiliriz*
>
> ***A: Anladım. Pekala, öğrenci sence doğru söylüyor mu? Sadece 0 var A kümesinde. Bunun grup olmadığını iddia ediyor.***
>
> *ÖA1: Hemen şunlara (kâğıda yazdığı 3 özelliği kastediyor) dayanarak yapabilirim o zaman. Şimdi A kümemizde sadece 0 var. Yani, şunu deneyelim o zaman. (birinci özelliği kastediyor ve yazdıklarını söyleyerek) a0=0 değil mi? …bak birinci şartımızı sağladı. İkinci şartımızı bakalım Eğer a, W kümesinin elemanı ise a+0=a da W kümesinin elemanı mı değil mi? Burada biz a yı W nin elemanı olmadığını görüyoruz…Burada ne olabilir. Biraz düşüneyim…Bu şartlara bakarak bunun cebirsel grup olduğunu diyemeyiz. Çünkü a ve b gibi elemanlar kümede yok…Belki de bu grup olmanın şartları da olmayabilir.*

Yukarıdaki diyalogda görüleceği üzere, ÖA2 grup olma şartlarının hiç birini hatırlayamamıştır. Burada öğretmen adayının alt uzay olma kavramıyla grup olmayı karıştırmış olabileceği görülmektedir. ÖA2 grup olma şartlarını yanlış ifade ettiğinden öğrenci bilgisiyle ilgili öğrencinin iddiasının doğruluğu bu yanlış bilgi üzerinden kanıtlamak istediği görülmektedir. Burada grup özelliklerini kullanarak öğrenciyi ikna etmek doğru bir yaklaşım olarak belirtilmesine rağmen grup özelliklerinin yanlış hatırlanması sonucu bu strateji bir süre sonra kullanılamamıştır. ÖA2'nin grup kavramıyla ilgili alan bilgisindeki yetersizlik nedeniyle öğrenci bilgisini düzeltmeye yönelik doğru strateji geliştiremediği söylenebilir.

ÖA2'nin grup konusuyla ilgili alan bilgisinin lineer denklemlerle ilişkisinin araştırıldığı P2 problemiyle ilgili ifadeleri aşağıda verilmiştir. Bu sayede ÖA2'nin alan bilgisini nasıl kullandığı ve gerektiğinde farklı bağlamlarda ne ölçüde kullanılabildiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

> ***A: …ax+b=c formundaki bir lineer denklemin herhangi bir A kümesinde tek çözüme sahip olmasını garanti edecek bir yöntem arıyoruz…bu denklemi çözmek için nasıl bir yöntem önerirsiniz?…***
> *ÖA2: Burada a, b, c sayıları sabit olduğu için burada "x"i yalnız bırakacağız. İşlem yapabilir miyim? ax+b=c, b'yi eşitliğin diğer tarafına gönderdiğimizde eksi olarak gelir. ax=c-b olur…x'i yalnız bırakmak için her iki tarafı a ile böleriz.* $\frac{ax}{a}=\frac{c-b}{a}$ *sonra a'lar sadeleşirse* $x=\frac{c-b}{a}$ *olur. c, b ve a sabit sayılar olduğu için bunun A kümesinde tek çözümü vardır diyebiliriz.*
> ***A: Bu yöntem sence her zaman geçerli midir? Tek çözümü garanti eder mi?…***
> *ÖA2: Burada şunu da söyleyeyim.(ax+b=c denkleminde a yı kastederek) x in yanındaki kat sayı sıfırdan farklı olmak zorunda.*
> ***A: Yani diyorsun ki, benim yöntemime göre x'in yanındaki sayı sıfırdan farklı ise her zaman bu tek çözümü garanti eder.***
> *ÖA2: Şöyle diyelim. Eğer x'in yanındaki sayı sıfır ise zaten sıfır ile x'in çarpımı sıfır olduğu için x'in herhangi bir değerini bulamayız.*
> ***A: Yine bir örnek verebilir miyim ben? 2x+1=x+x+1 bu denklem lineer denklem mi?***
> *ÖA2: Bu denklem lineer denklem mi? Bir dakika. Ya x'ler birbirini götürür burada. Lineer denklem mi? Lineer denklem diyemiyorum ben. x burada …her hangi bir değer alabilir.*
> ***A: Şöyle bir denklem yazalım o zaman. 2x+5=2x+4 (ÖA2 kağıda yazıyor)***
> *ÖA2: 2x+5=2x+4 bu lineer denklem değil. Çünkü zaten x'ler çözümünü yaptığımız zaman birbirini götürür. 5'te 4'e eşit olmadığı için böyle bir denklem olamaz diyorum.*
> ***A: …A kümesi nasıl yapılandırılmalı ki, lineer denklemin tek çözümü olsun. Mesela sen az önce bir tanesini söylemiştin. a sıfır olmamalı demiştin. O zaman tek çözüm olmuyordu. A kümesinde neler olmalı ki, lineer denklemin tek çözümü olsun.***
> *ÖA2:… A kümesinde seçtiğimiz sabit sayılar olmalı ve sabit sayıların toplama işlemine göre tersi olursa şu denklem için diyorum.(lineer denklemi kastediyor) Eğer çarpma şeklinde bir denklem olsaydı sabit sayıların A kümesinde çarpma işlemine göre tersleri olmalıydı*

Bu açıklamalardan görüleceği üzere, ÖA2 lineer denkleme bir çözüm yöntemi geliştirebilmekle birlikte bu çözüm yönteminde bazı eksikliklerin olduğu görülmektedir. Bunu fark eden ÖA2 ax+b=c biçimindeki bir denklemde x'in katsayısının sıfırdan farklı olması gerektiğini belirtmiştir. Bulunan yöntemin sonsuz çözümü olan ya da çözümü boş küme olan farklı lineer denklemlerle test edilmesi istendiğinde ÖA2'nin beklenmeyecek şekilde bu denklemlerin lineer olmayacağını ifade ettiği görülmektedir. Dolayısıyla ÖA2'ye göre bir denklemin lineer olması için tek çözüme sahip olması gerektiği belirtilmiştir. Ayrıca ÖA2 bir lineer denklemin tek çözümü garanti edebilmesinin ax+b=c denkleminde a değerinin sıfırdan farklı olmasının yanında denklemin tanımlandığı kümenin sabitleri (a, b, c katsayıları) ve bu sabitlerin ilgili işlemlere göre terslerini de içermesi gerektiği ifade edilmiştir. Ancak bu yöntem bulunurken ilgili kümede toplama ve çarpma işlemlerinde birleşme özelliği, etkisiz eleman özelliği gibi bazı grup özellikleri kullanılmasına rağmen öğretmen adayının bunları sıradan bir şekilde uygulaması neticesinde fark edemediği anlaşılmaktadır. (Yöntem kısmının son bölümüne bakınız) Sonuç olarak ÖA2 ax+b=c biçimindeki lineer denkleme tek çözümü garanti edecek bir yöntem bulmakla birlikte bu yöntemin bazı eksikleri olduğu görülmektedir. Ayrıca hangi denklemlerin lineer denklem olduğuyla ilgili de ÖA2'nin alan bilgisinde eksiklikler olduğu belirlenmiştir.

Tablo 4'te öğrenci bilgisiyle ilgili ikinci madde ÖA2'nin P3 problemini çözme sürecinde ortaya çıkmıştır. Aşağıda verilen diyalogda bu öğrenci bilgisiyle ilgili ÖA2'nin fikirlerini nasıl ortaya koyduğu verilmiştir.

> ***A: Bir öğrencinizin "herhangi bir ikili işlemde değişme özelliği varsa birleşme özelliği de vardır" şeklinde bir yanılgıya sahip olduğunu gördünüz...sizce, öğrenciniz hangi sebepten dolayı böyle bir yanılgıya düşmüş olabilir?***
> *ÖA2: Yapmış olduğu işlemlere dayanarak bunu yapmış olabilir (öğrencinin bildiği işlemler kastediliyor)…Toplama işlemi üzerinden hareket edelim. 3+5=8 değil mi? Buna aynı şekilde 5+3=8 şeklinde de yazabilir miyiz? Bir de bunun üçlüsünü yapalım. (3+2)+5 diyelim. Bu ne o zaman 5+5=10 değil mi? Bunu şöyle de yazabilirim. 3+(2+5) değil mi? Bu da 3+7=10 burada da birleşme özelliği var…O zaman değişme özelliği varsa bak, birleşme özelliği de vardır.*
> ***A: ...öğrencideki bu yanılgıyı düzeltmek için nasıl bir açıklama yaparsınız?***
> *ÖA2: Bu yanılgıyı düzeltmek için…farklı örnekler vererek böyle bir şeyin olmadığını gösterirdim.*
> ***A: Farklı örnek veririm dedin. Farklı örnek verebilir misin?***
> *ÖA2: Düşünelim şu anda birlikte isterseniz. Değişme özelliği olsun ama birleşme özelliği olmasın, değil mi?*
> ***A: Hı hı...Düşün istersen zamanımız var.***
> *ÖA2: …Nasıl yapabiliriz. Nasıl yapabiliriz. (düşünüyor)*
> ***A: Sence bu öğrencinin dediği doğru mu? Öğrenci gerçekten yanılgıya mı düşmüştür?***
> ***ÖA2:** Aslında ee yanılgıya düşmemiş de olabilir. Başka kümelerde üzerinde, sadece toplama üzerinden gittiğimizde yanılgıya düşmemiş. Eğer toplama işlemi üzerinden gidersek. Başka işlemler üzerinden gidelim. Onu düşünüyorum şu anda.*
> ***A: Bütün işlemleri düşünmeliyiz, değil mi?***
> *ÖA2: Başka ne düşünebiliriz?...Başka örnek nasıl olur? Şu an hatırlayamıyorum.*

Yukarıdaki diyalogda görüleceği üzere, ÖA2 bir öğrencinin "değişme özelliği olan bir işlemde birleşme özelliği de olmalıdır" şeklindeki yanılgıya düşmesine toplama işlemi neden olmuş olabileceği ifade edilmektedir. Bu yanılgının aksi bir örnekle giderilebileceği belirtilmiştir. Ancak ÖA2 bu örneği alan bilgisindeki yetersizlik nedeniyle bulamadığı görülmektedir. Burada ÖA2 uygun stratejiyi bulmuş olsa da bunu uygulamaya geçemediği belirlenmiştir. ÖA2 uygun örneği bulamayınca "*Aslında ee yanılgıya düşmemiş de olabilir*" şeklinde bir ifade kullanmıştır. Buradan alan bilgisindeki yetersizliğin ÖA2'yi öğrencinin düştüğü yanlış algılamaya düşürme potansiyelinin olduğu şeklinde yorumlanabilir.

ÖA2'nin alan bilgisiyle ilgili belli ölçüde eksikleri olmasına rağmen değişme özelliği, birleşme özelliği gibi temel kavramları doğru bir şekilde uygulayabildiği görülmektedir. Öğrenci bilgisiyle ilgili doğru stratejiyi tespit etmesine rağmen alan bilgisindeki yetersizlik sebebiyle bunu uygulamaya geçiremediği anlaşılmaktadır. Aksi örneği bulamayan öğretmen adayı öğrencinin düştüğü yanılgının belki de doğru olabileceğini ifade etmiştir. Bu durum alan bilgisindeki eksikliğin öğretmen adayını istemeden de olsa kavram yanılgılarına sürükleyebilme potansiyeli olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adayı 3'ün (ÖA3) araştırma kapsamında sorulan sorulara verdiği yanıtlar Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. ÖA3'ün Grup Konusuyla İlgili Alan Bilgisine ve Öğrenci Bilgisine İlişkin Bilgiler

Alan Bilgisi	1. Herhangi bir kümede kümeye ait iki elemanın toplamı ve çarpımı o kümeye aitse buna grup denir. 2. Bir elemanlı küme grup şartını sağlamaz. Çünkü grup için en az 2 eleman gerekir 3. Lineer denklemler bilinmeyen yalnız bırakılarak çözülebilir. 4. Lineer denklemlerin tek çözümü olmalıdır. 5. Toplamada değişme özelliği a+b=b+a şeklindedir. 6. Toplamada birleşme özelliği (a+b)+c =a+(b+c) şeklindedir. 7. Bir kuralın yanlışlığı onu sağlamayan zıt örnek vererek düzeltilebilir
Öğrenci Bilgisi	1. Bir elemanlı küme grup oluşturmayacağı için öğrencinin söylediği doğrudur. 2. Öğrenciler toplama ve çarpma işleminde değişme özelliği olduğundan değişme özelliği olan herhangi bir işlemde birleşme özelliğinin de olabileceği yanılgısına sahip olabilir.

Tablo 5'te görüldüğü üzere, ÖA3'ün görüşme analizlerinden alan bilgisiyle ilgili 7 madde ve öğrenci bilgisiyle ilgili 2 madde belirlenmiştir. Alan bilgisiyle ilgili 1, 2 ve 4 numaralı maddeler yanlış, 3, 5, 6 ve 7 maddeleri doğru olarak ifade edilmiştir. Öğrenci bilgisiyle ilgili birinci madde yanlış, diğerinin doğru olduğu görülmektedir. Tablo 5'te alan bilgisiyle ilgili bazı sonuçları ve öğrenci bilgisiyle ilgili ilk maddeyi aşağıda ÖA3'ün P1 problemini çözüm sürecinde görüşmelerden alınan kesitler desteklemektedir.

> ***A: …Öncelikle grup nedir onu sorayım?***
>
> *ÖA3: Grup nedir? Şeydir. Eğer cebirsel olarak soruyorsanız. Eğer A kümesindeki elemanların her birisi kümeye aitse onların toplamlarıyla çarpımları da kümeye ait olması lazım. Hani a, b є A ise (yazdıklarını söylüyor) a+b є A ya da ab є A şeklinde öğrendik sanki biz. O zaman bunlar grup oluşturuyordu.*
> ***A: Sence öğrenci doğru söylüyor mu? Yanlış söylüyorsa neden yanlış?***
> *ÖA3: Küme tek elemandan oluşuyor o zaman tek elemanla biz bu işlemleri kuramayız. O zaman doğru söylüyordur.*

Yukarıdaki diyalogda görüleceği üzere, ÖA3'ün grup kavramını bilmediği anlaşılmaktadır. Ayrıca bir elemanlı kümede tanımlanan bir işlemin grup olamayacağını ifade etmiştir. Bu yönüyle ÖA3 problemde verilen öğrencinin düştüğü hataya düştüğü görülmektedir. Burada görüldüğü gibi alan bilgisindeki yetersizlik ÖA3'e öğrenci bilgisiyle ilgili hatayı tespit edememesine neden olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayının tablo 5'deki alan bilgisiyle ilgili bazı sonuçlarının çıkarıldığı P2 probleminin çözümüyle ilgili açıklamaları aşağıda verilmiştir.

> ***A:…ax+b=c formundaki bir lineer denklemin herhangi bir A kümesinde tek çözüme sahip olmasını garanti edecek bir yöntem arıyoruz. … nasıl bir yöntem önerirsiniz?***
> *ÖA3: Nasıl bir yöntem. x'i yalnız bırakma yöntemi kullanırım. x'in üssü bir olduğu için bunun zaten bir çözümü vardır. O da nasıl olurdu. (söylediklerini kağıda yazıyor) ax+b=c şeklinde ax=c-b ise* $x = \frac{c-b}{a}$ *olur.*
> ***A: …bu yöntem bize her zaman tek çözümü verir mi? a sayısı 0 olabilir mi?***
> *ÖA3: a sayısı 0 olabilir. O zaman b=c olur. O zaman çözüm olmaz zaten. a=0 olsa x diye bir değer bulamayız orada. a=0 olamaz orada. Eğer bu denklemse, a=0 olamaz. Çünkü biz çözüm arıyoruz. Çözümü olmayan bir şey lineer denklem olamaz.*
> ***A: …şöyle bir şey yazsak…2x+1=x+x+1 desek,..***
> *ÖA3: 0=0 bu denklem değil.*
> ***A: Burada çözüm kümesi nedir?***

ÖA3: Burada bütün reel sayılar.
A: Bütün reel sayılar. Biz ne demiştik hani demiştik ki, tek çözümü garanti edecek bir yöntem arıyoruz, değil mi? Sence bulmuş olduğun yöntemde bir eksiklik var mı?
ÖA3: Bütün denklemleri karşılamıyor evet.
A: Sence bunu nasıl düzeltebiliriz.
ÖA3: Nasıl düzeltebiliriz.(düşünüyor) Çözüm şu anda yok.

Görüldüğü üzere ÖA3 lineer denklemdeki bilinmeyenin yalnız bırakılarak bu denklemin çözülebileceği şeklinde bir yöntem bulduğu görülmektedir. Ancak bu yöntem bazı lineer denklemlerin çözümünde tek çözümü garanti etmediği anlaşılmaktadır. ÖA3 ax+b=c denkleminde x'in katsayısı olan sabitin sıfırdan farklı olduğu durumda lineer denklemin daima tek çözüme sahip olabileceğini ifade etmiştir. Ancak lineer denklemin çözüm sürecinde yöntemini sıradan bir şekilde uygulaması sonucunda ilgili işlemlerde bileşke özelliği, birim eleman özelliği ve ters eleman özelliği gibi grup özelliklerini kullanmadığı görülmektedir. (Yöntem kısmının sonuna bakınız) Ayrıca ÖA3 çözümü olmayan ya da sonsuz çözümü olan lineer denklemlerin lineer olmayacağı şeklinde bir açıklama yapmıştır. Sonuçta ÖA3 lineer denklemler için bir yöntem geliştirmesine rağmen bu yöntemin doğasında var olan yapıları fark etmediği söylenebilir. Yani grup kavramıyla lineer denklemler arasındaki bağı görememiştir.

ÖA3'ün tablo 5'teki bazı alan bilgisi sonuçları ve öğrenci bilgisiyle ilgili ikinci maddenin ortaya çıkmasını sağlayan P3 problemine ilişkin açıklamaları aşağıda verilmiştir.

A: ...bir öğrencinizin "herhangi bir ikili işlemde değişme özelliği varsa birleşme özelliği de vardır" şeklinde bir yanılgıya sahip olduğunu gördünüz. Sizce, öğrenciniz hangi sebepten dolayı böyle bir yanılgıya düşmüş olabilir? Öğrencideki bu yanılgıyı düzeltmek için nasıl bir açıklama yaparsınız?
ÖA3: Şimdi değişme özelliği neydi? a+b=b+a.
A: Mesela toplama işleminde böyleydi, değil mi?
ÖA3: Evet. ab=ba
A: Bu da çarpma işleminde değil mi?
ÖA3: Birleşme özelliği (a+b)+c=a+(b+c). Öğrenci sadece çarpma işlemi ve toplama işlemini bildiği için buradan bir yanılgıya düşmüş olabilir.
A: Yani, sadece bu işlemleri biliyor.
ÖA3: Evet. Bunu da işleme koyduğunda zaten tutuyor. Ondan dolayı bu yanılgıya düşmüş olabilir.
A: ***Bu yanılgı nasıl düzeltilebilir?***
ÖA3: Onu (soruda geçen ifadeyi) karşılamayan örnekler vererek düzeltebilirdim.
A: Karşılamayan örnek. Nasıl bir örnek düşünürsün mesela.
ÖA3: Yani, (düşünüyor) Çıkarma işleminde zaten ne vardı? İkisini de karşılamıyor zaten. Değişme özelliği yok çıkarma işleminde.
A: Uygun bir örnek olur mu çıkarma işlemi?
ÖA3: Uygun olmadı. Bölme işleminde yine yok. Vereceğimiz örneği, şimdi düşünüyorum da bulamıyorum

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere ÖA3 bir öğrencinin yanılgısının toplama ve çarpma gibi bildiği işlemler üzerinden hareket ettiğinde "değişmeli bir işlemin birleşme özelliğinin de olabileceği" şeklinde ifade edilen yanılgıya düşebileceğini ifade etmektedir. Burada yanılgının kaynağı öğrencinin bildiği işlemlerde her iki özelliğin sağlanması şeklinde açıklanmıştır. Bu yanılgının aksine örnek verme metodu ile düzeltilebileceği belirtilmiştir. Ancak diyalogdan da görüleceği üzere böyle bir örneği ÖA3 ortaya koyamamıştır. Neticede bir öğrencinin yanılgısını düzeltmek için öncelikle onun neden hata yaptığı, bu hatanın hangi stratejilerle çözümlenebileceği ve bu stratejinin gerçekleştirilirken uygulamada ne ölçüde verilen duruma uygun düştüğünün bilinmesi gerekmektedir. ÖA3 öğrenci hatasını ve çözüm stratejisini bulmasına rağmen alan bilgisinde sadece dört işlem bulunduğundan değişmeli olup birleşmeli olmayan bir işlem örneği ortaya koyamadığı görülmektedir.

Öğretmenlerin adaylarının hepsinin alan bilgilerinin zayıf olduğu dikkat çekmektedir. ÖA1 ayrıca en temel işlemleri dahi yapamadığı belirlenmiştir. Öğretmen adayları bazı öğrenci hatalarını tespit edebildikleri gözlenmiştir. Bu hataların çözümüne ilişkin doğru stratejiyi de belirledikleri görülmektedir. Ancak stratejinin uygulama aşamasında alan bilgilerindeki yetersizlik nedeniyle doğru bir yaklaşım ortaya koyamamışlardır. Bu açıdan öğretmen adayları öğrenci bilgisine az da olsa sahip olduğu ifade edilebilir.

SONUÇ TARTIŞMA VE ÖNERİLER

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının grup konusuyla ilgili pedagojik alan bilgisi bileşenlerinden alan bilgisi ve öğrenci bilgisi bileşenlerini ortaya çıkarmayı amaçlayan bu çalışmada şu sonuçlar elde edilmiştir.

Araştırmanın birinci alt problemi olan cebir alanında öğretmen adaylarının grup kavramını nasıl tanımladıklarının sorulmuştur. Öğretmen adaylarının hiçbirinin grup kavramını doğru olarak tanımlayamadığı belirlenmiştir. Öğretmen adayları grup kavramının bazı özellikleri olduğunu ifade etmelerine rağmen bu özellikleri doğru bir şekilde hatırlayamadıkları görülmüştür. Sadece ÖA1 grup kavramının özelliklerinden birleşme ve kapalılık özelliklerine değindiği tespit edilmiştir. Ancak bu öğretmenin matematiğin temel kavramlarından birleşme özelliğini toplama ve çarpma gibi en temel işlemlerde dahi uygulayamadığı belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının grup kavramında kavramsal öğrenmeyi gerçekleştiremedikleri, hatta bazı öğretmen adaylarının işlemsel düzeyde dahi olsa bilgilerinin olmadığı görülmüştür.

Araştırmanın ikinci alt probleminde öğretmen adaylarının grup kavramının diğer konularla ilişkisini ne ölçüde kurabildikleri incelenmiştir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarından bir lineer denklemin tek çözüme sahip olmasını garanti edecek yöntem bulmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının tamamı doğru yöntemi bulmalarına rağmen yöntemlerini geliştirme sürecinde işlemleri alışık oldukları biçimde sıradan yapmaları sonucunda grup özelliklerini yansıtabilecek yaklaşımları göremedikleri belirlenmiştir. Yani, grup konusuyla lineer denklemler arasında olması gereken ilişkiyi kuramadıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının bu yöntemi geliştirme sürecinde lineer denklemlerle ilgili alan bilgilerinde bazı hatalarla karşılaşılmıştır. Örneğin sonsuz çözümü olan ya da çözümü boş küme olan lineer denklemlerin olmayacağı ve lineer denklemlerin tamamının tek çözüme sahip olması gerektiği bunlardan bazılarıdır.

Araştırmanın üçüncü ve dördüncü alt probleminde öğretmen adaylarının öğrenci hatalarının ne ölçüde farkında oldukları ve bunları düzeltmeye yönelik nasıl bir yaklaşımda bulundukları incelenmiştir. Öğretmen adaylarının kısmen öğrenci hatalarının farkında oldukları söylenebilir. Çünkü değişme özelliğini sağlayan bir işlemin birleşme özelliğini de sağlaması gerektiğiyle ilgili öğrenci hatasının kaynağıyla ilgili öğretmen adaylarının tamamı doğru bir yaklaşım izleyerek öğrencilerin toplama ve çarpma gibi bildikleri işlemler neticesinde böyle bir yanılgıya düşmüş olabileceklerini ifade etmişlerdir. İspat yöntemlerinden aksine örnek verme metoduyla bu yanılgının giderilebileceğini vurgulayan öğretmen adaylarının, doğru bir strateji geliştirdikleri de söylenebilir. Ancak bu stratejinin uygulama aşamasında öğretmen adayları uygun örneği bulamamışlardır. Yani öğretmen adaylarının alan bilgisindeki yetersizlik nedeniyle öğrenci hatalarına yönelik doğru stratejiyi gerçekleştirilemedikleri belirlenmiştir. Hatta doğru örnek bulunamaması neticesinde bazı öğretmen adaylarının bahsedilen ifadenin hata olmasıyla ilgili çelişkiye düştüğü de tespit edilmiştir. ÖA2'nin aksi örneği bulamadığında "aslında yanılgıya düşmemiş de olabilir" şeklindeki ifadeleri alan bilgisindeki eksikliğin öğretmen adayını öğrencilerin düşebileceği hatalara sürükleme potansiyelinin olduğu şeklinde yorumlanabilir. Aynı şekilde ÖA3'ün A={0} olacak şekilde bir elemanlı bir kümesinin bilinen çarpma işlemi altında grup belirtmesiyle ilgili probleme, grup kavramının tanımlanabilmesi için kümenin en az 2 elemanının olması gerektiği şeklindeki açıklamaları bu tür durumlara örnek olarak gösterilebilir.

Ball (1990) araştırmasında, öğretmen adaylarının $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ işlemini doğru olarak yaptıklarını, ancak çok azının bu işlemin ne anlama geldiğini açıklayabildiklerini belirtmiştir. Aynı araştırmada öğretmen adaylarının işlemler ve işlem basamaklarıyla ilgili kavramları anlamalarının eksik olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu araştırmada ise ax+b=c lineer denklemine çözüm yöntemi bulma sürecinde öğretmen adaylarının işlemlerin altında yatan grup özellikleri gibi yaklaşımları kullanmadıkları, grup özellikleriyle lineer denklemler arasındaki ilişkileri göremedikleri ve sanki bir ortaokul öğrencisi gibi sıradan bir şekilde işlemleri gerçekleştirdikleri tespit edilmiştir. Bu sonuçların Ball'ın (1990) araştırmasındaki sonuçlarla paralellik gösterdiği söylenebilir. Even ve Tirosh (1995) yaptıkları çalışmada öğretmenlerin temel bilgilerinde (sıfır, fonksiyon, ispat gibi kavramlarda) eksiklik olduğunu belirtmiştir. Bu araştırmada ise öğretmen adaylarının ispat yöntemlerinden aksi örnek bulma metodunu alan bilgilerindeki yetersizlik nedeniyle kullanamadıkları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adayları cebirin temel kavramlarından grup kavramını yanlış tanımlamaları bu konuda önemli derecede eksiklerinin olduğunu ortaya koymuştur. Matematiksel kavramlardaki öğretmen adaylarının eksiklikleri Even ve Tirosh (1995) çalışmalarında öğretmenlerin temel bilgilerindeki eksikliklerle benzerlik gösterdiği söylenebilir.

Tirosh (2000) kesirlerde bölme işlemiyle ilgili öğretmen adaylarının PAB bileşeninin incelendiği çalışmada katılımcıların çoğunun kesirlerde bölmeyi nasıl yapacaklarını tanımlaya bilmelerine rağmen işlem basamaklarını açıklayamadıkları ifade edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının kesirler konusunda öğrenci hatalarının kaynağına ilişkin bilgilerden habersiz oldukları belirtilmiştir. Bu çalışmada ise öğretmen adaylarının öğrenci hatalarına yönelik doğru stratejiyi ifade etmelerine rağmen uygulamada alan bilgisindeki yetersizlik nedeniyle bunu ortaya çıkaramamışlardır.

Araştırmacılar öğretmen adaylarının öğrencilerin cevaplarının altında yatan düşünceleri analiz etmede zayıf oldukları sonucuna ulaşmışlardır (Even & Tirosh, 1995). Bahsi geçen araştırmadan farklı olarak bu çalışmada, öğretmen adaylarının öğrenci hatalarının altında yatan düşünceleri doğru tahmin etmelerine rağmen bu hataların düzeltilmesi noktasında alan bilgilerindeki eksiklik nedeniyle uygun stratejiyi uygulamada sorunlar yaşadıkları belirlenmiştir. Bu sonuçlar Dede ve Peker'nin (2007) çalışmasında öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel işlem ve ifadelere yönelik hata ve yanlış anlamalarının giderilmesine yönelik yeterli düzeyde çözüm önerisi getiremediklerini belirttiği sonuçlarla paralellik gösterdiği söylenebilir.

Zaslavsky ve Peled (1996: 67, 68, 77) ikili işlemin değişme ve birleşme özellikleri ile ilgili çalışmada, matematik öğretmenlerinin ve aday öğretmenlerin karşılaştıkları güçlükleri belirlemek ve bu güçlüklerin olası kaynaklarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Çalışmada katılımcılardan karşıt örnekler (birleşmeli olup da değişmeli olmayan bir ikili işlem, vb.) oluşturmaları istenmiştir. Çalışmanın sonuçlarından biri, katılımcıların çoğunun değişmeli olup da birleşmeli olmayan bir ikili işlemin olmayacağı yanlış inanışına sahip olmaları şeklinde ifade edilmiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarından değişme özelliği olan ancak birleşme özelliği olmayan bir işlem örneği bulmaları istenmesine rağmen bu örneğin bulunamadığı görülmüştür. Bunun sonucunda bazı öğretmen adaylarının bu yanılgının doğru olabileceğine ilişkin bir yaklaşım sergilediği tespit edilmiştir. Bu sonucun Zaslavsky ve Peled'in (1996) çalışmalarındaki sonuçlarla benzerlik gösterdiği söylenebilir.

Matematik öğretmen adaylarının yetiştirilmesi sürecinde alan bilgilerinin sürekli kontrol edilerek alan bilgisindeki eksikliklerinin giderilmesine yönelik eğitimler verilmesinin onların bu konuda önemli kazanımlar elde etmesini sağlayacağı düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının güçlü alan bilgisine sahip olmalarının öğrenci bilgisiyle ilgili hatalara karşı uygun strateji geliştirmede olumlu yansımaları olacağı öngörülmektedir.

KAYNAKÇA

Altun, M. (2012). *Eğitim Fakülteleri ve Sınıf Öğretmenleri için Matematik Öğretimi (17.Baskı).* Bursa: Alfa Akademi.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 132-144.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. A. E. Kelly, & R. A. Lesh içinde, *Handbook of research design in mathematics and science education* (s. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Coşkun, O., Güler, G., & Dikici, R. (2011). Modüler aritmetik kavramıyla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 1(2)*, 91-108.

Dede, Y., & Peker, M. (2007). Öğrencilerin cebire yönelik hata ve yanlış anlamaları: Matematik öğretmen adaylarının bunları tahmin becerileri ve çözüm önerileri. *İlköğretim Online, 6*, 35-49.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1997). A reaction to burn's "What are the fundemental Concepts of Group Theory?". *Educational Studies in Mathematics 34*, 249–253.

Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 1-20.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a Teacher: Teacher Knowledge and Teacher Education.* New York: Teachers College Press.

Hill, H. C., Ball, D. B., & Schilling , S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge students. *Journal for Research in Mathematics Teacher Education, 39(4)*, 372-400.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education, 41(3)*, 3-11.

Moralı, S., Köroğlu, H., & Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24(1)*, 161-175.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform . *Harvard Educational Review, 57(1)*, 1-22.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teacher's knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 5-25.

Ususkin, Z., Peressini, A., Marchisotto, E. A., & Stanley, D. (2003). *Mathematics for high school teachers: an advenced perspective.* New Jersey: Pearson Education.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally (7th ed.).* Boston: Allyn & Bacon.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri (8.Baskı).* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: the case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 67-78.

Zembat, İ. Ö. (2013). Kavram yanılgısı nedir? M. F. Özmantar, E. Bingölbali, & H. Akkoç içinde, *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri (3.Baskı)* (s. 1-8). Ankara: Pegem Akademi.